Helmut Kobelt

DIE BEURTEILUNG MULTIVARIATER ZUSAMMENHÄNGE BEI NOMINALSKALIERTEN DATEN

Dargestellt anhand von Beispielen
aus den Wirtschaftswissenschaften

1973

1974

DIE BEURTEILUNG MULTIVARIATER ZUSAMMENHÄNGE BEI NOMINALSKALIERTEN DATEN

DARGESTELLT ANHAND VON BEISPIELEN AUS DEN WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Wirtschaftswissenschaften
durch den
Fachbereich Wirtschafts- und Sozialwissenschaften
der Westfälischen Wilhelms-Universität zu Münster

vorgelegt von
Dipl.-Volksw. Helmut Kobelt
aus Erfurt

1974

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Erster Berichterstatter : Prof. Dr. Josef Bleymüller

Zweiter Berichterstatter : Prof. Dr. Herbert Gülicher

Dekan : Prof. Richard H. Tilly, Ph.D.

Tag der mündlichen Prüfung : 26. Juni 1973

Inhalt

Seite

Verzeichnis der Tabellen XI
Verzeichnis der Abbildungen XV
Verzeichnis der Abkürzungen XVII
Verzeichnis der im Text ständig wiederkehrenden Symbole XVIII
(1) Verzeichnis der allgemeinen Symbole XVIII
(2) Verzeichnis der Symbole der verschiedenen möglichen Betrachtungsweisen bei Unabhängigkeitstests XXII

1 Einleitung 1

2 Die Skalierung von Merkmalen 9

2.1 Die Theorie des Messens 9
2.1.1 Die Bedeutung des Begriffs "Messen" und des Meßvorgangs 9
2.1.2 Die mathematischen Grundlagen der Meßtheorie 12
2.1.3 Der Begriff des Messens 14

2.2 Die Nominalskala als statistische Meßskala 16

2.3 Die Bedeutung der Skalierung von statistischen Merkmalen für die Analyse von Zusammenhängen 18

Seite

3 Die Grundlagen der Bestimmung multivariater Zusammenhänge zwischen nominalskalierten Daten 21

3.1 Die Darstellung von mehrfach-nominalskalierten Daten in Form einer Kontingenztabelle 21

3.2 Der Begriff des Zusammenhangs zwischen statistischen Merkmalen 27

3.2.1 Abgrenzung des Begriffs des Zusammenhangs 27

3.2.2 Der Begriff des einfachen Zusammenhangs zwischen nominalskalierten Merkmalen 31

3.2.3 Der Begriff des Zusammenhangs höherer Ordnung zwischen nominalskalierten Merkmalen 35

4 Die Prüfung einfacher Zusammenhänge zwischen nominalskalierten Merkmalen 43

4.1 Das Grundmodell der Prüfung einfacher Unabhängigkeit zwischen nominalskalierten Merkmalen 43

4.2 Die Prüfung der einfachen Unabhängigkeit zwischen drei nominalskalierten Merkmalen mit Hilfe des χ^2-Verfahrens 51

4.2.1 Die Darstellung des χ^2-Unabhängigkeitstests 51

Seite

4.2.2 Der Test auf totale Unabhängigkeit zwischen drei nominalskalierten Merkmalen 61

4.2.3 Der Test auf multiple Unabhängigkeit zwischen drei nominalskalierten Merkmalen 64

4.2.4 Der Test auf partielle Unabhängigkeit zwischen drei nominalskalierten Merkmalen 67

4.2.5 Der Test auf unbedingte Zweifachunabhängigkeit zwischen drei nominalskalierten Merkmalen 72

4.3 Die Prüfung der einfachen Unabhängigkeit zwischen drei nominalskalierten Merkmalen mit Hilfe des informationstheoretischen Verfahrens 75

4.3.1 Das Modell der Informationstheorie 75

4.3.2 Der Test auf totale Unabhängigkeit zwischen drei nominalskalierten Merkmalen 91

4.3.3 Der Test auf multiple Unabhängigkeit zwischen drei nominalskalierten Merkmalen 93

Seite

4.3.4 Der Test auf partielle Unabhängigkeit zwischen drei nominalskalierten Merkmalen 95

4.3.5 Der Test auf unbedingte Zweifachunabhängigkeit zwischen drei nominalskalierten Merkmalen 97

4.4 Die Ermittlung von Koeffizienten des einfachen Zusammenhangs zwischen drei nominalskalierten Merkmalen 99

4.4.1 Die Ermittlung von Koeffizienten des einfachen Zusammenhangs zwischen drei nominalskalierten Merkmalen auf der Basis des χ^2-Verfahrens 99

4.4.2 Die Ermittlung von Koeffizienten des einfachen Zusammenhangs zwischen drei nominalskalierten Merkmalen auf der Basis des informationstheoretischen Verfahrens 112

4.4.3 Die Ermittlung von Koeffizienten des einfachen Zusammenhangs zwischen drei nominalskalierten Merkmalen auf der Basis von Modellen optimaler Vorhersage 119

Seite

4.5 Anwendungsbeispiele für die Bestimmung einfacher Zusammenhänge zwischen nominalskalierten Merkmalen 130

4.5.1 Vorbemerkungen 130

4.5.2 Die Bestimmung von Zusammenhängen zwischen dem Herkunftsland, der gewählten Studienrichtung und dem gewählten Studienort in Nordrhein-Westfalen von deutschen Studienanfängern im Wintersemester 1970/71 131

4.5.3 Die Bestimmung von Zusammenhängen zwischen der verwaltungsmäßigen Gliederung, dem Bruttoinlandsprodukt und der Anzahl von Gymnasiasten pro 1.000 der Bevölkerung für die 90 Kreise Nordrhein-Westfalens 141

5 Die Prüfung von Zusammenhängen höherer Ordnung zwischen drei nominalskalierten Merkmalen 147

5.1 Das Grundmodell zur Prüfung des Zusammenhangs höherer Ordnung zwischen nominalskalierten Merkmalen 147

Seite

5.2 Die Prüfung von Zusammenhängen höherer Ordnung zwischen drei nominalskalierten Merkmalen mit Hilfe eines Verfahrens von GOODMAN 155

5.2.1 Die Prüfung von Zusammenhängen höherer Ordnung in 2 × 2 × 2 - Kontingenztafeln 155

5.2.2 Die Prüfung von Zusammenhängen höherer Ordnung in 2 × 2 × ℓ - Kontingenztafeln 162

5.2.3 Die Prüfung von Zusammenhängen höherer Ordnung in 2 × c × ℓ - Kontingenztafeln 167

5.2.4 Die Prüfung von Zusammenhängen höherer Ordnung in r × c × ℓ - Kontingenztafeln 176

5.3 Das informationstheoretische Modell zur Bestimmung des Zusammenhangs höherer Ordnung zwischen nominalskalierten Merkmalen 188

5.4 Die Ermittlung von Koeffizienten des Zusammenhangs höherer Ordnung 193

5.5 Anwendungsbeispiele für die Bestimmung von Zusammenhängen höherer Ordnung zwischen nominalskalierten Merkmalen 195

Seite

5.5.1 Vorbemerkungen 195
5.5.2 Die Prüfung des Zusammenhangs zweiter Ordnung zwischen dem Herkunftsland, der gewählten Studienrichtung und dem gewählten Studienort in Nordrhein-Westfalen von deutschen Studienanfängern im Wintersemester 1970/71 195
5.5.3 Die Prüfung des Zusammenhangs zweiter Ordnung zwischen der verwaltungsmäßigen Gliederung, dem Bruttoinlandsprodukt und der Anzahl von Gymnasiasten pro 1.000 der Bevölkerung für die 90 Kreise Nordrhein-Westfalens 197

6 Möglichkeiten der Weiterführung der angeführten Verfahren zur Beurteilung von Zusammenhängen zwischen nominalskalierten Merkmalen 199

6.1 Die Analyse von Zusammenhängen zwischen nominalskalierten Merkmalen in einem System hierarchischer Hypothesen 199

6.2 Die Analyse von Zusammenhängen zwischen nominalskalierten Merkmalen in einem multivariaten Analysemodell 202

Seite

6.3 Die Möglichkeiten der Ausweitung der Zusammenhangsanalyse auf mehr als drei Merkmale 208

7 Schlußbemerkungen 217

Literaturverzeichnis 223

Anhang 233

1. EDV-Programme 235

Programm zur Unabhängigkeitsanalyse dreidimensionaler Kontingenztabellen auf der Basis des χ^2-Verfahrens 237

Programm zur Unabhängigkeitsanalyse dreidimensionaler Kontingenztabellen auf der Basis des informationstheoretischen Modells 241

Programm zur Analyse der Unabhängigkeit zweiter Ordnung (nach GOODMAN) in dreidimensionalen Kontingenztabellen 245

2. Tabellen 249

Tabelle 1 Tabelle der $2n \cdot \ln(n)$ für $n=1$ bis $n=9.999$ 251

Tabelle 2 Tabelle der $2n \cdot \ln(n)$ für $n=1/2$ bis $n=499\ 1/2$ zur Anwendung der YATES-Korrektur 273

Verzeichnis der Tabellen

Seite

Tab. 1 : Allgemeine Darstellung einer zweidimensionalen Kontingenztabelle 22

Tab. 2 : Allgemeine Darstellung einer dreidimensionalen Kontingenztabelle 24

Tab. 3 : Klassifikation des Modellbeispiels 1 von 1.000 Unternehmen nach den Merkmalen Rechtsform, Gewinnentwicklung und Mitbestimmung 26

Tab. 4 : Beobachtete Häufigkeiten des Demonstrationsbeispiels 55

Tab. 5 : Erwartete Häufigkeiten des Demonstrationsbeispiels 55

Tab. 6 : Kontingenztabelle der beobachteten Häufigkeiten n_{ijk} für Modellbeispiel 1 63

Tab. 7 : Kontingenztabelle der unter Gültigkeit der Hypothese totaler Unabhängigkeit zu erwartenden Häufigkeiten n'_{ijk} für Modellbeispiel 1 63

Tab. 8 : Kontingenztabelle der zu erwartenden Häufigkeiten n'_{ijk} für den Unabhängigkeitstest I(JK) für Modellbeispiel 1 66

Tab. 9 : Kontingenztabelle der zu erwartenden Häufigkeiten n'_{ijk} für den Unabhängigkeitstest J(IK) für Modellbeispiel 1 66

Tab. 10 : Kontingenztabelle der zu erwartenden Häufigkeiten n'_{ijk} für den Unabhängigkeitstest K(IJ) für Modellbeispiel 1 66

Seite

Tab. 11 : Kontingenztabelle der beobachteten Häufigkeiten n_{ijl} für Modellbeispiel 1 70

Tab. 12 : Kontingenztabelle der erwarteten Häufigkeiten n'_{ijl} für Modellbeispiel 1 70

Tab. 13 : Kontingenztabelle der beobachteten Häufigkeiten $n_{ij.}$ für Modellbeispiel 1 74

Tab. 14 : Kontingenztabelle der erwarteten Häufigkeiten $n'_{ij.}$ für Modellbeispiel 1 74

Tab. 15 : Klassifikation von 500 Arbeitern nach Herkunftsregion und Berufsausbildung 88

Tab. 16 : Zwei zweidimensionale Kontingenztabellen, deren Felder nur entlang der Hauptdiagonalen besetzt sind 102

Tab. 17 : Zwei dreidimensionale Kontingenztabellen, deren Felder nur entlang der Hauptdiagonalen besetzt sind 108

Tab. 18 : Der maximale totale Kontingenzkoeffizient und dessen Kehrwert in Abhängigkeit von ausgewählten Untersuchungsumfängen 110

Tab. 19 : Übersicht über die verschiedenen Kontingenzkoeffizienten, maximale Kontingenzkoeffizienten und korrigierte Kontingenzkoeffizienten für das Modellbeispiel 1 111

Tab. 20 : Übersicht über die verschiedenen Kontingenzkoeffizienten und korrigierten Kontingenzkoeffizienten auf der Basis des informationstheoretischen Verfahrens für das Modellbeispiel 1 118

Seite

Tab. 21 : Deutsche Studienanfänger an den Universitäten Nordrhein-Westfalens im Wintersemester 1970/71, aufgeteilt nach Herkunftsland, Studienfachrichtung und besuchter Universität 133

Tab. 22 : Deutsche Studienanfänger im Fach Pharmazie nach Herkunftsländern und besuchter Universität in NRW 138

Tab. 23 : Aufgliederung der 90 Kreise Nordrhein-Westfalens nach verwaltungsmäßiger Gliederung, Bruttoinlandsproduktindex und Anzahl der Gymnasiasten pro 1.000 der Bevölkerung für das Jahr 1971 143

Tab, 24 : Befragungsergebnisse von jeweils 500 Wahlberechtigten 164

Tab. 25 : Befragungsergebnisse von 336 Personen über Präferenzen bei Verpackungsform und Verpackungsfarbe 173

Tab. 26 : Aufteilungsmöglichkeiten einer 3 × 4 -Kontingenztabelle in 6 Kontingenztabellen vom Umfang 2 × 2 177

Tab. 27 : Verkaufshäufigkeiten von 1-Liter-Mengen Milch 183

Tab. 28 : Ergebnisübersicht der Tests auf Unabhängigkeit zweiter Ordnung für die Modellbeispiele 1, 2, 3 und 4 192

Seite

Tab. 29 : Darstellung der Hypothesengruppen in hierarchischer Reihenfolge für das multivariate Analyseverfahren dreidimensionaler Kontingenztabellen für die Merkmale I, J und K mit den Ausprägungen I_i, (i=1,2,...,r), J_j, (j=1,2,...,c) und K_k, (k=1,2,...,ℓ) 209

Tab. 30 : Übersicht über die verschiedenen möglichen Unabhängigkeitshypothesen in einer vierdimensionalen Kontingenztafel mit den Merkmalen H, I, J und K und mit den Ausprägungen H_h, I_i, J_j und K_k 213

Verzeichnis der Abbildungen

Seite

Abb. 1 : Kontingenzwürfel der Klassifikation von 1.000 Unternehmen nach den Merkmalen "Rechtsform", "Gewinnentwicklung" und "Mitbestimmung" 27

Abb. 2 : Die Wechselbeziehungen zwischen den Merkmalen I, J und K im Falle totaler Abhängigkeit 32

Abb. 3 : Die Wechselbeziehungen zwischen den Merkmalen I, J und K im Falle multipler Abhängigkeiten 33

Abb. 4 : Die Wechselbeziehungen zwischen den Merkmalen I, J und K im Falle partieller Abhängigkeiten 34

Abb. 5 : Die Wechselbeziehungen zwischen den Merkmalen I, J und K im Falle unbedingter Zweifachabhängigkeiten 35

Abb. 6 : Die Wechselbeziehungen zwischen den Merkmalen I, J und K im Falle der Abhängigkeit höherer Ordnung 36

Abb. 7 : Darstellung der χ^2-Dichtefunktion mit $\nu = 4$ Freiheitsgraden 56

Abb. 8 : Kontingenzwürfel zu Modellbeispiel 1 60

Abb. 9 : Allgemeiner Kontingenzwürfel mit jeweils drei Merkmalsausprägungen 68

Abb. 10 : Die auszuwertenden Kontingenzwürfel für den Test auf unbedingte Zweifachunabhängigkeit für Modellbeispiel 1 72

Abb. 11 : Der maximale Wert einer χ^2-Prüfgröße in Abhängigkeit vom Untersuchungsumfang für verschiedene Größen von Kontingenztabellen 103

Seite

Abb. 12 : Die Größe des maximalen zweidimensionalen Kontingenzkoeffizienten in Abhängigkeit von der Größe der Kontingenztabelle 104

Abb. 13 : Darstellung der Hauptdiagonalen in einem dreidimensionalen Kontingenzwürfel vom Umfang 3 × 3 × 3 105

Abb. 14 : Die Abhängigkeit der Größe des totalen Kontingenzkoeffizienten von der Verteilung der Beobachtungshäufigkeiten auf der Hauptdiagonalen einer 2 × 2 × 2 - Kontingenztabelle für Beobachtungsumfänge von n = 1.000 und n = 2.000 109

Abb. 15 : Allgemeiner 2 × 2 × 2 - Kontingenzwürfel mit Angabe der relativen Beobachtungshäufigkeiten p_{ijk} 148

Abb. 16 : Die parallelen Ebenen des Kontingenzwürfels aus Abb. 15 149

Abb. 17 : Die Bedingung der Unabhängigkeit höherer Ordnung für eine 2 × 2 × 2 - Kontingenztabelle 150

Abb. 18 : Darstellung der Unabhängigkeitstestprozedur nach VICTOR 203

Verzeichnis der Abkürzungen

a.a.O.	am angegebenen Ort
Abb.	Abbildung
AMS	The Annals of mathematical Statistics
Aufl.	Auflage
bzw.	beziehungsweise
Ed.	Editor (Der Herausgeber)
Eds.	Editors (Die Herausgeber)
EDV	Elektronische Datenverarbeitung
f.	und folgende Seite
ff.	und folgende Seiten
Hrsg.	Der (oder die) Herausgeber
i.e.S.	im engeren Sinne
i.w.S.	im weiteren Sinne
JASA	The Journal of the American statistical Association
JRSS(A)	The Journal of the Royal statistical Society, Series A (General)
JRSS(B)	The Journal of the Royal statistical Society, Series B
No., Nr.	Nummer
S.	Seite
u.	und
vgl.	vergleiche
Vol.	Volume (Band, Ausgabe)
zit.	zitiert

Verzeichnis der im Text ständig wiederkehrenden Symbole

(1) Verzeichnis der allgemeinen Symbole

A	Kontingenzkoeffizient zur Prüfung des Zusammenhangs höherer Ordnung
a	Maximum-Likelihood-Schätzwert zu A
α	Statistische Risikowahrscheinlichkeit
χ^2	1) Bezeichnung einer Testverteilung 2) Bezeichnung eines statistischen Testverfahrens
χ^2_A	Bezeichnung der Prüfgröße des χ^2-Testverfahrens für die spezielle Betrachtungsweise A (Vgl. hierzu die Symbole der verschiedenen möglichen Betrachtungsweisen bei Unabhängigkeitstests)
$\chi^2_{c(\nu;\alpha)}$	Kritischer χ^2-Wert gemäß χ^2-Verteilung in Abhängigkeit von der Zahl der Freiheitsgrade (=ν) und der statistischen Risikowahrscheinlichkeit (=α).
c	Anzahl der Ausprägungen des Spaltenmerkmals J (von coloumn)
Δ_k	Kreuzproduktverhältnis
d_k	Maximum-Likelihood-Schätzwert für Δ_k
H	Das Untersuchungsmerkmal H mit den Ausprägungen H_h, $(h=1,2,\ldots,m)$
H_o	Die Nullhypothese
H_1	Die Alternativhypothese
I	Das Zeilen-Untersuchungsmerkmal I mit den Ausprägungen I_i, $(i=1,2,\ldots,r)$ bzw. $I_{\tilde{i}}$, $(\tilde{i}=1,2,\ldots,r-1)$
$2\hat{I}_A$	Bezeichnung der Prüfgröße des informationstheoretischen Testverfahrens für die spezielle Betrachtungsweise A (Vgl. hierzu die Symbole der verschiedenen möglichen Betrachtungsweisen bei Unabhängigkeitstests)
J	Das Spalten-Untersuchungsmerkmal J mit den Ausprägungen J_j, $(j=1,2,\ldots,c)$ bzw. $J_{\tilde{j}}$, $(\tilde{j}=1,2,\ldots,c-1)$

K	Das Untersuchungsmerkmal K mit den Ausprägungen K_k, $(k=1,2,\ldots,\ell)$ bzw. $\tilde{K}_k$, $(k=1,2,\ldots,\ell-1)$
KC_A	Der Kontingenzkoeffizient auf der Basis des χ^2-Verfahrens für die spezielle Betrachtungsweise A (Vgl. hierzu die Symbole der verschiedenen möglichen Betrachtungsweisen bei Unabhängigkeitstests)
KI_A	Der Kontingenzkoeffizient auf der Basis des informationstheoretischen Verfahrens für die spezielle Betrachtungsweise A (Vgl. hierzu die Symbole der verschiedenen möglichen Betrachtungsweisen bei Unabhängigkeitstests)
korr	korrigiert
ℓ	Anzahl der Ausprägungen des Schichtenmerkmals K (von Layer)
λ_i	Der Kontingenzkoeffizient auf der Basis optimaler Vorhersage. Die Vorhersage ist bezogen auf das Merkmal I
λ_j; λ_k	Analog zu λ_i
λ	Der Kontingenzkoeffizient auf der Basis optimaler Vorhersage. Die Vorhersage ist hier bezogen auf alle Merkmale der Untersuchung
λ^I_i; λ^I	Zeileneffekt
λ^J_j; λ^J	Spalteneffekt
λ^K_k; λ^K	Schichteneffekt
λ^{IJ}_{ij}; λ^{IJ}	Einfache Wechselwirkung zwischen I und J
λ^{IK}_{ik}; λ^{IK}	Einfache Wechselwirkung zwischen I und K
λ^{JK}_{jk}; λ^{JK}	Einfache Wechselwirkung zwischen J und K
λ^{IJK}_{ijk}; λ^{IJK}	Wechselwirkung zweiter Ordnung zwischen I, J und K
max	maximal möglich
$\underset{I}{Max}\ a_{ij}$	Das Maximum aller a_{ij} über alle Ausprägungen des Merkmals I für $j=1,2,\ldots,c$

$\underbrace{\text{Max}}_{i} a_{i.}$	Das Maximum aller a_i über alle Ausprägungen des Merkmals I
$\underbrace{\text{Max}}_{j} a_{ij}; \underbrace{\text{Max}}_{k} a_{ik}$	Analog zu $\underbrace{\text{Max}}_{I} a_{ij}$
$\underbrace{\text{Max}}_{j} a_{.j}; \underbrace{\text{Max}}_{k} a_{.k}$	Analog zu $\underbrace{\text{Max}}_{I} a_{i.}$
Min(B,C)	Die kleinere der Größen B oder C
N	Umfang der untersuchten Grundgesamtheit
n	Umfang der untersuchten Teilgesamtheit
N_{ijk}	Die absolute Beobachtungshäufigkeit von Untersuchungsobjekten der Grundgesamtheit mit der Ausprägung I_i des Merkmals I, J_j des Merkmals J und K_k des Merkmals K
n_{ijk}	Analog zu N_{ijk} für die Teilgesamtheit
N'_{ijk}	Die bei Gültigkeit einer bestimmten Hypothese zu erwartenden absoluten Häufigkeiten von Untersuchungsobjekten in der Grundgesamtheit mit der Ausprägung I_i des Merkmals I, J_j des Merkmals J und K_k des Merkmals K
n'_{ijk}	Analog zu N'_{ijk} für die Teilgesamtheit
$N_{i..}; N_{.j.}; N_{..k}$	Randsummen der N_{ijk}
$n_{i..}; n_{.j.}; n_{..k}$	Randsummen der n_{ijk}
$N_{ij.}; N_{i.k}; N_{.jk}$	Bedingte Randsummen der N_{ijk}
$n_{ij.}; n_{i.k}; n_{.jk}$	Bedingte Randsummen der n_{ijk}
ν	Die Zahl der Freiheitsgrade
P_{ijk}	Die relative Beobachtungshäufigkeit von Untersuchungsobjekten in der Grundgesamtheit mit der Ausprägung I_i des Merkmals I, J_j des Merkmals J und K_k des Merkmals K
P_{ijk}	Analog zu P_{ijk} für die Teilgesamtheit
P'_{ijk}	Die bei Gültigkeit einer bestimmten Hypothese zu erwartenden relativen Häufigkeiten von Untersuchungsobjekten in der Grundgesamtheit mit der Ausprägung I_i des Merkmals I, J_j des Merkmals J und K_k des Merkmals K

p'_{ijk}	Analog zu P'_{ijk} für die Teilgesamtheit
$P_{i..};P_{.j.};P_{..k}$	Randsummen der P_{ijk}
$p_{i..};p_{.j.};p_{..k}$	Randsummen der p_{ijk}
$P_{ij.};P_{i.k};P_{.jk}$	Bedingte Randsummen der P_{ijk}
$p_{ij.};p_{i.k};p_{.jk}$	Bedingte Randsummen der p_{ijk}
p^2	Prüfgröße für den Test auf Unabhängigkeit zweiter Ordnung in einer $2 \times 2 \times 2$ -Kontingenztabelle nach BARTLETT
r	Anzahl der Ausprägungen des Merkmals I (von row)
v_{ijk}	Zufallsbedingter Versuchsfehler
W	Wahrscheinlichkeit
w_i	Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Ausprägung I_i des Merkmals I
w_j; w_k	Analog zu w_i
W(I)	Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Merkmals I
W(J); W(K)	Analog zu W(I)
x^2	Prüfgröße für den Test auf Unabhängigkeit höherer Ordnung nach GOODMAN
y^2	Prüfgröße für den Test auf Unabhängigkeit höherer Ordnung nach GOODMAN
$\underline{!}$	... soll gleich sein ...
$\forall_{ijk}$ $\forall_{ij};\forall_{ik};\forall_{jk}$ $\forall_i$; $\forall_j$; $\forall_k$	...gilt für alle im Index angegebenen Ausprägungen der betreffenden Merkmale

(2) Verzeichnis der Symbole der verschiedenen möglichen Betrachtungsweisen bei Unabhängigkeitstests

total	Gesamtbetrachtung der Beziehungen aller Merkmale zueinander
total/I	Gesamtbetrachtung der Beziehungen aller Merkmale zueinander, wobei das Ergebnis der Betrachtung auf das Merkmal I bezogen wird
total/J; total/K	Analog zu total/I
I(JK)	Betrachtung der Beziehungen zwischen dem Merkmal I einerseits und dem Merkmalskomplex (JK) andrerseits (multiple Betrachtungsweise)
J(IK); K(IJ)	Analog zu I(JK)
I(JK)	Betrachtung der Beziehungen zwischen dem Merkmal I einerseits und dem Merkmalskomplex (JK) andrerseits, wobei das Ergebnis der Betrachtung auf das Merkmal I bezogen wird
I(JK)	Betrachtung der Beziehungen zwischen dem Merkmal I einerseits und dem Merkmalskomplex (JK) andrerseits, wobei das Ergebnis der Betrachtung auf den Merkmalskomplex (JK) bezogen wird
J(IK); K(IJ)	Analog zu I(JK)
J(IK); K(IJ)	Analog zu I(JK)
IJ/K_k	Betrachtung der Beziehungen zwischen den Merkmalen I und J bei der vorgegebenen Ausprägung K_k des Merkmals K
IK/J_j; JK/I_i	Analog zu IJ/K_k
IJ/K_k	Betrachtung der Beziehungen zwischen den Merkmalen I und J bei der vorgegebenen Ausprägung K_k des Merkmals K, wobei das Ergebnis der Betrachtung auf das Merkmal I bezogen wird

$\underline{I}K/J_j$; $\underline{J}K/I_i$	Analog zu $\underline{I}J/K_k$
$I\underline{J}/K_k$	Betrachtung der Beziehungen zwischen den Merkmalen I und J bei der vorgegebenen Ausprägung K_k des Merkmals K, wobei das Ergebnis der Betrachtung auf das Merkmal J bezogen wird
$I\underline{K}/J_j$; $J\underline{K}/I_i$	Analog zu $I\underline{J}/K_k$
IJ	Betrachtung der Beziehungen zwischen den Merkmalen I und J
IK; JK	Analog zu IJ
$\underline{I}J$	Betrachtung der Beziehungen zwischen den Merkmalen I und J, wobei das Ergebnis der Betrachtung auf das Merkmal I bezogen wird
$\underline{I}K$; $\underline{J}K$	Analog zu $\underline{I}J$
$I\underline{J}$	Betrachtung der Beziehungen zwischen den Merkmalen I und J, wobei das Ergebnis der Betrachtung auf das Merkmal J bezogen wird
$I\underline{K}$; $J\underline{K}$	Analog zu $I\underline{J}$
(m)	Betrachtung der Unabhängigkeit m-ter Ordnung

1 EINLEITUNG

Seit die Statistik nicht mehr nur Methoden zur Deskription von Daten lieferte, sondern sich zur induktiven Statistik weiterentwickelte, wurde man sich in zunehmendem Maße darüber klar, daß statistisch interessierende Merkmale nicht nur für sich zu untersuchen sind, sondern auch in ihrem Zusammenwirken mit anderen Merkmalen. Es entstand mithin die Aufgabe, die Wechselbeziehungen zwischen mehreren statistischen Einflußgrößen aufzudecken und zu analysieren. So werden beispielsweise betriebliche Kosten bestimmt durch den Werkstoffverbrauch, durch Art und Menge der eingesetzten Produktionsmittel, durch den zeitlichen Umfang des Einsatzes der Produktionsfaktoren, durch die Intensität ihrer Ausnutzung und durch weitere Einflußgrößen.

Im Rahmen der Wirtschaftswissenschaften sind die Bearbeitung und die Lösung derartiger Problemstellungen von außerordentlicher Bedeutung. Dieser Tatsache wurde man sich in den letzten Jahrzehnten mehr und mehr bewußt. Allerdings wurden "... in der Ökonomie ... die objektiven Zusammenhänge zwischen den Erscheinungen bisher im wesentlichen nur beschrieben, ohne sie hinsichtlich ihrer Art, ihrer Intensität und ihrer Form näher zu erforschen."[1)]

Die Untersuchung wirtschaftlicher Zusammenhänge ist deshalb von so großer Bedeutung, weil zum einen erst durch sie tiefergehende Einblicke in die Mechanismen ökonomischer Systeme möglich

---

1 Siehe : FÖRSTER, E. und EGERMAYER, F.: Korrelations- und Regressionsanalyse, ein Leitfaden für Ökonomen, Berlin 1966, S. 9 .

werden, durch deren Verständnis diese Systeme rationeller eingesetzt und optimaler ausgenutzt werden können. Zum anderen ist die Kenntnis der Art und der Stärke des Zusammenwirkens von ökonomischen Variablen eine unabdingbare Voraussetzung für Prognosen über ebendiese Variablen und somit ein notwendiges Instrument für die Planung von ökonomischen Abläufen.

Bei der statistischen Analyse von Zusammenhängen zwischen ökonomischen Daten beschränkte man sich zunächst auf die Analyse quantitativer Daten, da hierfür mathematische Analyseverfahren bekannt und anwendbar waren. Von einzelnen Versuchen abgesehen, wurde der Zusammenhangsanalyse qualitativer Daten relativ geringes Interesse entgegengebracht, vor allem weil die Möglichkeiten einer mathematisch-statistischen Analyse, die die entsprechenden Daten zuließen, die Anwendung völlig neuartiger Modelle notwendig machte. Aber auch auf ökonomischem Gebiet existieren eine große Zahl von qualitativen Variablen, die einer Erklärung und einer Analyse ihrer Wechselbeziehungen zu anderen Größen bedürfen. Gerade in denjenigen Zweigen der Wirtschaftswissenschaften, denen in jüngster Zeit vermehrte Aufmerksamkeit zugewandt wurde, wie dem Marketing, der Marktforschung, der soziologischen Analyse von Wirtschaftsgruppen und anderen mehr, ist die Bedeutung qualitativer Daten und damit die Bedeutung von Verfahren zu deren Analyse ganz erheblich.

Während man sich zu Beginn der statistischen Analyse von Zusammenhängen fast ausschließlich auf die Untersuchung der Beziehungen zwischen zwei

Variablen beschränkte, ist man nach Klärung der sich dabei ergebenden Probleme nunmehr dazu übergegangen, komplexe ökonomische Vorgänge aus dem Zusammenwirken vieler Einflußgrößen zu erklären und Verfahren zur Analyse dieses Zusammenwirkens zu entwickeln. Statistische Verfahren zur Analyse von Beziehungen innerhalb derartiger Merkmalskomplexe bezeichnet man allgemein als m u l t i - v a r i a t e V e r f a h r e n . Diese haben unbestreitbar auch für qualitative Daten große Bedeutung Gerade hier klafft aber in Bezug auf die notwendigen Analyseverfahren noch eine beachtliche Lücke. So führte denn auch M. G. KENDALL in einem vielbeachteten Vortrag[1] über die Zukunft der Statistik aus[2]:

> Es ist eine ziemlich gewagte Aufgabe, zu versuchen, die zukünftigen Entwicklungslinien der theoretischen Statistik vorherzusagen, aber nach meiner Meinung gibt es zwei Punkte von wachsender Bedeutung, und ich möchte diese gern etwas detaillierter in Betracht ziehen. Der erste umfaßt die Schließung der Lücke zwischen der Theorie und den Anforderungen der multivariaten Statistik. Diese Probleme, die in fast allen statistischen Forschungsvorhaben auftauchen, die sich mit diesem Problemkreis befassen, sind noch weit von ihrer Lösung entfernt. Aus der möglicherweise langen Liste möchte ich nur einige Beispiele zitieren :
> Multiple Kontingenztabellen. Die Probleme von Vielfachklassifikationen sind von dreifacher Art : das reine Problem der Darstellung, so daß man die Ergebnisse als Ganzes betrachten kann; das Problem von leeren Feldern oder kleinen Häufigkeiten, die auch in den Feldern einer Tabelle bei großen Stichproben auftreten können; und vielleicht das Schwierigste von allen, eine Methode der Analyse, die die verschiedenen Wechselbeziehungen zwischen den Klassifikationsvariablen kennzeichnet.

---

1 Dieser Vortrag wurde am 17.1.1968 vor der königlichen statistischen Gesellschaft gehalten. Er ist wiedergegeben in : KENDALL, M.G.: On the future of statistics - a second look, JRSS (A) 131 (1968), S. 182 ff., hier : S. 188 .

2 Bei diesem Text handelt es sich um eine eigene Übersetzung des Verfassers, wie auch bei allen folgenden fremdsprachlichen Zitaten.

Aufgrund dieser Problemstellung wird sich der Verfasser der vorliegenden Arbeit darum bemühen, die verschiedenen, zum Teil in jüngster Zeit entstandenen Analyseverfahren für mehrfach klassifizierte Daten darzustellen, zu systematisieren und in einen Gesamtrahmen zu stellen. Dabei wird versucht werden, sowohl die theoretischen Hintergründe abzuklären, als auch anhand zahlreicher Demonstrationsbeispiele Hinweise für die Anwendungsmöglichkeiten dieser Verfahren im Rahmen der Wirtschaftswissenschaften aufzuzeigen.

Aus der dargelegten Zielsetzung für die vorliegende Arbeit ergibt sich aber eine derartige Fülle von Problemen, daß eine Eingrenzung an verschiedenen Punkten der Darstellung unumgänglich erscheint.

Zunächst erscheint hier das Problem der zu behandelnden Zahl von Dimensionen : Bei der Untersuchung der Beziehungen zwischen zwei qualitativen Variablen muß man davon ausgehen, daß zwischen ihnen Einflüsse bestehen, oder nicht, daß mit anderen Worten Abhängigkeit oder Unabhängigkeit besteht. Schon bei der Erweiterung der Betrachtung auf drei Dimensionen ergibt sich eine Fülle von neuen Analysemöglichkeiten :

(1) Analyse des Zusammenwirkens aller drei Merkmale in der Art, daß sich alle Merkmale gleichzeitig wechselseitig beeinflussen (Analyse des totalen Zusammenwirkens);

(2) Analyse des Zusammenwirkens von einem Merkmal einerseits und den beiden übrigen Merkmalen andrerseits (Analyse des multiplen Zusammenwirkens);

(3) Analyse des Zusammenwirkens von jeweils zweien der drei Merkmale (Analyse des unbedingten zweifachen Zusammenwirkens);

(4) Analyse des Zusammenwirkens von jeweils zwei Merkmalen bei einer vorgegebenen Ausprägung des dritten Merkmals (Analyse des bedingten zweifachen Zusammenwirkens oder des partiellen Zusammenwirkens);

(5) Analyse des Einflusses eines Merkmals auf das Zusammenwirken der übrigen Merkmale (Analyse des Zusammenwirkens höherer Ordnung).

Einzelheiten der verschiedenen Arten der Analyse des Zusammenwirkens von drei Merkmalen werden ausführlich im dritten Kapitel diskutiert.

Erweitert man die Analyse auf mehr als drei Merkmale, so zeigt sich, daß hierbei keine grundsätzlich neuen Analysemöglichkeiten zu beobachten sind[1]). Der statistisch interessante Übergang der Untersuchung ist also der von zwei auf drei Merkmale. Aus diesem Grund beschränkt der Verfasser seine Darstellung auf höchstens drei Merkmale und arbeitet die sich hier im Vergleich zur Untersuchung zweier Merkmale ergebenden grundsätzlich neuen Probleme deutlich heraus. Diese Beschränkung erscheint sinnvoll, da eine Erweiterung der darzustellenden Verfahren auf mehr als drei Dimensionen ohne Schwierigkeiten möglich ist.

Eine weitere Beschränkung der Erörterung erscheint dem Verfasser notwendig : Bei der Untersuchung der Beziehungen zwischen drei Merkmalen kann man zum einen alle möglichen Beziehungen nacheinander untersuchen und die Ergebnisse einzeln oder im Gesamtzusammenhang interpretieren. Zum anderen kann man die Abweichung der einzelnen Beobachtungswerte von einem "mittleren" Beobachtungswert aus dem Zusammenwirken bestimmter Effekte und Wechsel-

1 Vgl.: LEWIS, B. N.: On the analysis of interaction in multidimensional contingency tables, JRSS(A) 125 (1962), S. 97ff. .

wirkungen erklären, wobei hier die Wechselwirkungen die gleiche Bedeutung haben, wie die einzeln zu untersuchenden Beziehungen zwischen den Variablen. Beide Vorgehensweisen verdienen ungeteiltes Interesse. Eine Darstellung beider würde aber einen sehr großen Darstellungsumfang erfordern. Da zudem die zweite Form der Analyse dem gestellten Thema nur bedingt entspricht, wird der Verfasser nur die Verfahren darstellen, die eine separate Untersuchung der einzelnen Fragestellungen des Zusammenwirkens zwischen den Merkmalen beinhaltet.

In dem der Einleitung folgenden z w e i t e n K a p i t e l erörtert der Verfasser statistische Meßprobleme. Dies erscheint notwendig um eine klare Abgrenzung nominalskalierter von anderen Merkmalen zu ermöglichen.

Im d r i t t e n K a p i t e l werden sodann die Grundlagen der Analyse von Zusammenhängen zwischen nominalskalierten Daten erläutert. Dabei wird zunächst der Begriff des Zusammenhangs diskutiert und gegen andere verwandte Begriffe abgegrenzt. Zudem wird die Darstellung von mehrfachnominalskalierten Daten behandelt, da ohne diese eine vereinheitlichte Analyse dieser Daten nicht möglich ist.

Im v i e r t e n K a p i t e l ergibt sich für die Tests auf einfache Unabhängigkeit eine parallele Darstellung zweier Verfahrensgruppen, die sich in der Vergangenheit unabhängig voneinander entwickelt haben, nämlich erstens das χ^2-Verfahren mit seinen Varianten und zweitens eine Reihe von Verfahren, die sich Gedanken der

Informationstheorie zunutze machen. Hierauf folgt ein Abschnitt über die Maße der Stärke von Zusammenhängen. Das vierte Kapitel wird abgerundet durch zwei größere Demonstrationsbeispiele mit empirischem Datenmaterial aus dem Bereich der Kapazitätsuntersuchungen für Hochschulen und aus der Regionalforschung.

Im f ü n f t e n K a p i t e l werden die Möglichkeiten der Analyse dreifach-nominalskalierter Daten auf Zusammenhänge höherer Ordnung hin aufgezeigt. Dabei wird nach Darstellung des Grundmodells analog zum vierten Kapitel wiederum eine vergleichbare Darstellung der verschiedenen Verfahrensgruppen vorgenommen. So werden zunächst die Modellansätze von GOODMAN erläutert, die je nach Umfang der zu untersuchenden Merkmale systematisch verallgemeinert werden. Dem steht der informationstheoretisch begründete Ansatz gegenüber, der infolge seines wesentlich einfacheren Aufbaus sofort in seiner allgemeinsten Form dargestellt werden kann. Das Kapitel wird abgerundet durch die Darstellung von Koeffizienten für die Stärke von Zusammenhängen höherer Ordnung und durch die entsprechenden Berechnungen für die Demonstrationsbeispiele des vierten Kapitels.

Im s e c h s t e n K a p i t e l wird sodann aufgezeigt, wie die dargestellten Testverfahren systematisiert werden können und wie sie auf die Untersuchung von vier und mehr Merkmalen zu erweitern sind.

Die Schlußbemerkungen des s i e b e n t e n K a p i t e l s beinhalten einen kritischen

Vergleich zwischen dem χ^2-Verfahren und den informationstheoretischen Methoden sowie eine Beurteilung der Anwendbarkeit der zu erörternden Verfahren im Rahmen ökonomischer Forschungen.

Im A n h a n g der Arbeit finden sich Tabellen zur Hilfe bei Berechnungen sowie Hinweise zur Benutzung der EDV-Programme, die der Verfasser zum vorliegenden Problemkreis erarbeitet hat. Diese Programme sollen die mitunter sehr rechenaufwendigen Methoden einer schnellen und wirtschaftlichen Anwendung zugänglich machen.

2 DIE SKALIERUNG VON MERKMALEN

2.1 Die Theorie des Messens

2.1.1 Die Bedeutung des Begriffes "Messen" und des Meßvorgangs

In vielen Wissenschaftsbereichen bemüht man sich darum, den jeweiligen Untersuchungsgegenstand nicht nur zu beschreiben, sondern beobachtbare Phänomene mit den Aussagen einiger weniger allgemeingültiger Gesetze zu erklären und vorherzusagen[1].

Diese allgemeingültigen Aussagen kann der Wissenschaftler unter anderem dem großen Rahmen der mathematischen Gesetze als einem formalen, logischen und werturteilsfreien System von Beziehungen entnehmen. Mit Hilfe der Mathematik können Modelle konstruiert werden, die, auf die Realität angewandt, zu einer Theorie über diese Realität führen können. Mathematische Modelle lassen sich aber nur dann auf die Realität anwenden, wenn die Beziehungen der empirischen Phänomene untereinander möglichst gut den Beziehungen und Gesetzen innerhalb des Modells entsprechen. Die Abbildung der Realität in einem Modell muß mit anderen Worten möglichst i s o m o r p h sein. Je höher der Grad der Isomorphie ist, desto besser lassen sich Aussagen, die man im mathematischen Modell durch dort zulässige Operationen ableiten kann, auf die Realität zurückbeziehen. Man kann also für die Phänomene der Realität mit Hilfe mathematischer Modelle Erklärungen finden, aus denen sich unter bestimmten Voraussetzungen Vorhersagen für die Realität ableiten lassen.

---

1 Siehe : COOMBS, C. H., DAWES, R. M. und TVERSKY, A.: Mathematical psychology, an elementary introduction, Englewood Cliffs (N.J.) 1970, S. 7.

Die Aktionsgrößen eines mathematischen Modells sind Zahlen oder allgemeine Symbole. Um die Realität im mathematischen Modell widerspiegeln zu können, muß man demnach den realen Phänomenen diese mathematischen Aktionsgrößen nach bestimmten Regeln zuordnen. Die mathematischen Symbole versinnbildlichen dann eine untersuchte Eigenschaft eines empirischen Objektes oder Ereignisses.

Den Prozeß der Zuordnung von mathematischen Symbolen zu realen Phänomenen nach bestimmten Regeln bezeichnet man nach STEVENS allgemein als M e s s e n [1]. Diese Definition des Meßbegriffs, die sich an die von CAMPBELL anlehnt[2], ist allerdings nicht eindeutig genug, obwohl sie von vielen Autoren in dieser oder einer sehr ähnlichen Form verwandt wird[3]. Um zu einer genaueren Definition, wie sie in Unterabschnitt 2.1.3 gegeben wird, zu gelangen, scheint es angebracht, sich zunächst den Prozeß des Messens zu vergegenwärtigen.

Im allgemeinen Sprachgebrauch verbindet man meist mit dem Begriff des Messens die Vorstellung des physikalischen Messens von Länge, Gewicht, Raum-

1 Vgl.: STEVENS, S. S.: Mathematics, measurement and psychophysics, in : STEVENS, S. S. (Ed.): Handbook of experimental psychology, London - New York, 3rd Printing 1960, S. 1 .

2 Vgl.: CAMPBELL, N. R.: Symposium : Measurement and ist importance for philosophy, Aristotelian Society Supplement 17 (1938), zit. nach : GUILFORD, J. P.: Psychometric methods, 2. Aufl., New York - Toronto - London 1954, S. 11 .

3 Vgl. z.B.: COOMBS, C. H.: Theory and methods of social measurement, in : FESTINGER, L. und KATZ, D. (Eds.): Research methods in the behavioral sciences, London 1953, S. 472; GUILFORD, J. P.: a.a.O., S. 5 ; SIEGEL, S.: Nonparametric statistics for the behavioral sciences, New York - Toronto - London 1956, S. 21 ; SIXTL, F.: Meßmethoden der Psychologie, theoretische Grundlagen und Probleme, Weinheim 1967, S. 2 .

inhalt oder ähnlichem, also mit einem Vorgang, bei dem eine Maßzahl mit Hilfe eines Meßinstruments ermittelt wird. Aber auch bei physikalischen Messungen kennt man eine Vielzahl von Problemen, bei denen eine Messung nicht mit einem Meßinstrument vorgenommen werden kann, sondern die Maßzahl mit Hilfe eines mathematischen Modells abgeleitet wird. Als Beispiel seien hier Messungen von ballistischen Flugbahnen, des Laufes der Gestirne oder der Bewegung von Molekülen angeführt. Ebenso wie man hier von Messen sprechen muß, liegt ein Meßvorgang vor, wenn man die Leistungen eines Studenten, die Präferenz für ein Produkt oder die Einordnung bestimmter Objekte in Klassifikationsschemata durch ein mathematisches Symbol ausdrückt. Nur erfolgt in diesen Fällen die Zuordnung des mathematischen Symbols nach anderen Regeln, als bei der Messung mit Hilfe eines Meßinstruments.

Der Vorgang des Messens läßt sich formal wie folgt darstellen[1]: Es bestehe eine Menge P von realen Phänomenen oder Objekten, die einer beliebigen empirischen Struktur genügen, das heißt

$$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots p_k\} \quad i=1,2,3,\ldots,k \qquad (2.1.1\text{-}1)$$

Lassen sich an den Elementen von P Eigenschaften in unterschiedlichem Ausmaß feststellen und nimmt man an einem Element von P einen Meßvorgang in bezug auf diese Eigenschaft vor, indem man jedem p_i einen bestimmten Meßwert b_j aus einer Menge B von mathematischen Elementen,

$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_j, \ldots, b_n\} \quad j=1,2,3,\ldots,n \qquad (2.1.1\text{-}2)$$

1 Vgl. hierzu : COOMBS, C. H., RAIFFA, H. und THRALL, R. M.: Some views on mathematical models and measurement theory, Psychological Review 61 (1954), S. 136 .

zuordnet, so läßt sich der Meßvorgang auffassen als Funktion

$$b_j = f(p_i) \qquad (2.1.1\text{-}3).$$

Durch diese Funktion wird die empirische Struktur von Phänomenen oder Objekten in der formalen Struktur von Elementen eines mathematischen Systems abgebildet. Die Eindeutigkeit der Funktion gibt den Grad der Isomorphie der Abbildung an.

Ein System P von empirischen Phänomenen oder Objekten kann aber auf verschiedene Arten in einem System B abgebildet werden, das heißt, es gibt mehrere Arten von Abbildungsfunktionen beziehungsweise mehrere Meßvorgänge. Dabei müssen die verschiedenen Funktionen, die jedem p_i ein b_j zuordnen, gleich strukturiert sein. So kann man zum Beispiel bei Längenmessungen die b_j nach einer "Millimeter-Funktion", einer "Inch-Funktion" oder einer "Werst-Funktion" zuordnen. Für die Messung einer Eigenschaft einer empirischen Menge P besteht also eine Klasse von numerischen Zuordnungsfunktionen[1].

2.1.2 Die mathematischen Grundlagen der Meßtheorie

Im letzten Unterabschnitt wurde Messen als die Zuordnung von mathematischen Symbolen zu empirischen Phänomenen bezeichnet, wobei die Zuordnung nach bestimmten Regeln vorgenommen werden muß. Um diese Definition von CAMPBELL und STEVENS genauer fassen zu können, muß kurz auf die mathe-

1 Vgl.: ADAMS, E.W., FAGOT, R.F. und ROBINSON, R.E.: A theory of appropriate statistics, Psychometrika 30 (1965), S. 101 .

matischen Grundlagen der Meßtheorie eingegangen werden.

Die Art der Zuordnungsregeln von mathematischen Symbolen zu empirischen Phänomenen wurde oben definiert durch den Funktionsausdruck

$$b_j = f(p_i) \ .$$

Um aber im mathematischen Modell zu berechenbaren Ergebnissen zu gelangen, müssen die Elemente des Modells Z a h l e n sein. Die Art der Zuordnungsregel gibt dann an, wieviele formale Eigenschaften der natürlichen Zahlen im betrachteten Fall auch Eigenschaften des Zuordnungssymbols sind[1]. Je mehr formale Zahleneigenschaften das Zuordnungssymbol ebenfalls besitzt, desto höherentwickelte mathematische Verfahren lassen sich zur Modellanalyse anwenden, und je höher die mathematischen Verfahren sind, desto genauer sind die Ergebnisse und möglichen Schlußfolgerungen aus dem Modell.

Bevor man aber die wichtigsten Zuordnungsregeln untersuchen kann, müssen die wesentlichen Eigenschaften der Zahlen dargestellt werden. Nach CAMPBELL sind dies[2]:

1. die Identitätseigenschaft,
2. die Ordnungseigenschaft und
3. die Additivitätseigenschaft.

Diese Eigenschaften beinhalten die folgenden Postulate :

(1) Postulate der Identitätseigenschaft :

1. Entweder a=b oder a≠b (Identität i.e.S.).
2. Wenn a=b, gilt auch b=a (Symmetrie)

---

1 Vgl.: SENDERS, V.L.: Measurement and statistics, New York 1958, S. 50 .

2 Siehe : GUILFORD, J. P.: a.a.O., S. 11

3. Wenn a=b und b=c gilt auch a=c (Transitivität i.w.S.).

(2) Postulate der Ordnungseigenschaft :

1. Wenn a≠b muß a>b oder a<b.
2. Wenn a>b gilt a≠b (Asymmetrie).
3. Wenn a>b und b>c gilt a>c (Transitivität i.e.S.).
4. Es muß gelten a≠a und a≠a (Irreflexibilität).

(3) Postulate der Additivitätseigenschaft :

1. Wenn a=p und b>0, gilt (a+b)>p.
2. Wenn a+b=c gilt auch b+a=c (Kommutativität).
3. Wenn a=p und b=q gilt (a+b)=(p+q).
4. Wenn (a+b)+c=d gilt auch a+(b+c)=d (Assoziativität).

Alle diese Postulate beinhalten Aussagen über Beziehungen mathematischer Symbole zueinander. Aus den drei Eigenschaften lassen sich geschlossene Systeme von Beziehungen ableiten, die dann mathematische Modelle darstellen. Hierbei ist aber zu beachten, daß zum Beispiel das Modell auf der Basis der Ordnungseigenschaft auch die Erfüllung der Identitätspostulate voraussetzt, und daß das Modell auf der Grundlage der Additivitätseigenschaft sowohl den Identitäts- als auch den Ordnungspostulaten genügen muß. Die Zahleneigenschaften sind also in der angegebenen Reihenfolge hierarchisch aufgebaut.

2.1.3 Der Begriff des Messens

Nachdem nunmehr der Meßprozeß in seinem Inhalt und bestimmte formale Eigenschaften des Zahlensystems verdeutlicht wurden, läßt sich der von CAMPBELL und STEVENS geprägte Begriff des Messens folgendermaßen präzisieren : Ein System von empirischen Ob-

jekten oder Ereignissen wird gebildet durch die Beziehungen dieser Objekte oder Ereignisse zueinander. Dieses System empirischer Beziehungen läßt sich durch ein System formaler mathematischer Beziehungen abbilden, das man als mathematisches Modell bezeichnet. Handelt es sich bei diesem mathematischen Modell um ein numerisches Modell, definiert man den Vorgang des Abbildens als Messen[1]. Diese Meßdefinition verlangt also immer das Vorliegen eines numerisch-mathematischen Modells und schließt jede Abbildung der Empirie in willkürlich ausgewählten mathematischen Symbolen aus. Aber auch eine willkürliche Auswahl von allgemeinen Symbolen und deren Zuordnung kann eine Regel im Sinne von CAMPBELL und STEVENS sein.

Wie oben schon erwähnt, läßt sich die Empirie durch verschiedene mathematische Modelle repräsentieren, die verschieden strenge Anforderungen an die Abbildungsgenauigkeit stellen. Allgemein bezeichnet man ein mathematisches Modell, das einem Meßvorgang zugrundeliegt, als eine M e ß s k a l a . Eine Meßskala wird definiert durch die Regeln, die die Beziehungen innerhalb des mathematischen Systems kennzeichnen. So haben Meßskalen höheren Niveaus mathematisch restriktivere Anforderungen zu erfüllen, als Skalen niedrigerer Niveaus. Kennzeichnend für die Restriktivität der Regeln einer Meßskala ist die Invarianz der Skala gegenüber T r a n s f o r m a t i o n e n der Skalenwerte. Deswegen wird die Art der zulässigen Transformationen auch oft als Charakteristikum der verschiedenen Meßskalen verwandt[2]. Eine zulässige Transfor-

1 Vgl.: COOMBS, C. H., DAWES, R. M. und TVERSKY, A.: a.a.O., S. 12 .

2 Vgl. hierzu : STEVENS, S. S.; a.a.O., S. 23; COOMBS, C. H., DAWES, R. M. und TVERSKY, A.: a.a.O., S. 14 ff. .

mation ist eine Funktion, die die Werte einer zahlenmäßigen Zuordnung einer gegebenen Klasse zahlenmäßiger Zuordnungen abbildet in Werten einer anderen zahlenmäßigen Zuordnung derselben Klasse[1]. Aus der Art der für die verschiedenen Skalen zulässigen Transformation resultieren auch unmittelbar die auf den verschiedenen Skalenniveaus anwendbaren statistischen Verfahren.

2.2 Die Nominalskala als statistische Meßskala

In Unterabschnitt 2.1.3 wurde Messen als die Repräsentation eines empirischen Systems von Beziehungen durch ein numerisches mathematisches Modell gekennzeichnet. Genügen die empirischen Beziehungen nur den in Unterabschnitt 2.1.2 erläuterten Identitätspostulaten, so handelt es sich bei dem entsprechenden isomorphen mathematischen Modell um ein "nominales Modell", das heißt, die Untersuchungseigenschaften werden auf einer N o m i n a l s k a l a gemessen.

Voraussetzung für das Vorliegen einer Nominalskala ist also, daß die einzelnen empirischen Objekte oder Ereignisse in der untersuchten Hinsicht eindeutig voneinander unterschieden werden können. Gleichartige Objekte werden derselben Zuordnungsklasse zugerechnet und mit dem gleichen Zuordnungssymbol gekennzeichnet, wobei dieses ein Wort, ein Buchstabe, ein graphisches Symbol oder eine Zahl sein kann. Da das Zuordnungssymbol gewissermaßen nur den "Namen" der Klasse darstellt, wird diese Skalenart als Nominalskala bezeichnet.

---

1 Siehe : ADAMS, E. W., FAGOT, R. F. und ROBINSON, R. E.: a.a.O., S. 101 .

Verschiedentlich wird die Daseinsberechtigung der Nominalskala angezweifelt[1], und zwar mit dem Argument, daß man das Zuordnen irgendwelcher Symbole zu empirischen Objekten oder Ereignissen keinesfalls als Messen bezeichnen könne , wenn die Zuordnungssymbole nur als Etikett einer gleichartigen Zuordnungsklasse dienen. Dem ist entgegenzuhalten, daß beim Messen auf dem Niveau der Nominalskala zumindest die Postulate der Identitätseigenschaft erfüllt sein müssen[2]. Da die Erfüllung dieser Postulate aber die unabdingbare Voraussetzung für das Messen auf allen höheren Niveaus darstellt, ist das Messen auf dem Niveau der Nominalskala zwar die unterste, aber dennoch eine notwendige und grundlegende Form des Messens.

Wie in Unterabschnitt 2.1.3 ausgeführt wurde, sind die mathematisch zulässigen Transformationen von Skalenwerten ein Kennzeichen der verschiedenen Skalenniveaus, wobei durch die Transformation die Struktur des empirischen Beziehungssystems nicht verletzt werden darf. Im Falle einer Nominalskala sind nur s y m m e t r i s c h e Transformationen der Skalenwerte zulässig. Unter einer symmetrischen Transformation versteht man eine Veränderung der Skalenwerte in der Art, daß nach Abschluß der Veränderung gleichartige Objekte wiederum den gleichen Skalenwert und unterscheidbare Objekte einen unterschiedlichen Skalenwert aufweisen. Die Struktur des empirischen Beziehungssystems muß im Falle der Nominalskala den Identitätspostulaten genügen. Da das Symmetriepostulat zur Identitätseigenschaft gehört, kann also eine symmetrische Transformation der Skalenwerte die nominale Struktur des empirischen Beziehungssystems nicht unzulässig

1 Vgl. z.B.: TORGERSON, W. S.: Theory and methods of scaling, New York - London - Sidney 1958, 5th Printing 1965, S. 16 ff. .

2 Vgl. oben S. 13 f. .

verändern.

Verwendet man als Skalenwerte nicht Buchstaben oder sonstige abstrakte Symbole, sagt man also zum Beispiel Gruppe "1", Gruppe "2" und so weiter, so ist stets zu berücksichtigen, daß die Zahlen hier nur in dem Sinne verwandt werden, empirische Objekte oder Ereignisse als einander gleich oder ungleich zu kennzeichnen. Zahlen werden hier nur in ihrer Eigenschaft verwandt, unterscheidbare Symbole zu sein. Da auf dem Niveau der Nominalskala weder die Postulate der Ordnungseigenschaft noch die der Additivitätseigenschaft erfüllt sein müssen, ist es sinnlos mit den Skalenwerten arithmetisch zu rechnen, denn eine derartige Operation entspricht nicht der Struktur des empirischen Beziehungssystems. Eine Nominalskala dient also ausschließlich der Klassifikation von empirischen Objekten oder Ereignissen nach dem Grundsatz der Identität.

2.3 Die Bedeutung der Skalierung von statistischen Merkmalen für die Analyse von Zusammenhängen

Aus der oben angeführten Definition des Meßbegriffs ergibt sich, daß auf den Niveaus der verschiedenen Meßskalen die Zuordnungsziffern in unterschiedlichem Maße die Eigenschaften natürlicher Zahlen aufweisen; lediglich auf dem Niveau der Verhältnisskala haben sie die Eigenschaften natürlicher Zahlen uneingeschränkt.

Dies bedeutet aber, daß bei der Analyse statistischer Merkmale, die auf verschiedenen Skalenniveaus

angesiedelt sind, keinesfalls die gleichen statistischen Parameter oder Verfahren herangezogen werden dürfen, weil die mathematischen Voraussetzungen hier unterschiedlich hoch sind, sodaß diese nicht von allen Zuordnungsziffern erfüllt werden können. Dieser Gedanke trifft auch auf die Verfahren zur Analyse von Zusammenhängen zu. Die Verfahren der herkömmlichen Zusammenhangsanalyse gehen zumeist von zumindest intervallskalierten Daten aus. Um auch für nichtmetrisch skalierte Daten Zusammenhangsuntersuchungen durchführen zu können, wurden aber auch hier entsprechende Verfahren entwickelt, die die Eigenschaften der Zuordnungszahlen berücksichtigen. Aufgrund der Hierarchie der Meßskalen können diese Verfahren aber auch auf alle anders skalierten Merkmale angewandt werden. Diesem Gesichtspunkt kommt dann besondere Bedeutung zu, wenn die Untersuchungsmerkmale einer Analyse auf verschiedenen Meßniveaus angesiedelt sind, wobei ein Merkmal nominalskaliert ist. Die Restriktionen, die dieses Merkmal aufgrund seiner Meßeigenschaften auf die Analyse ausübt, sind derart, daß insgesamt nur die Untersuchungsverfahren angewandt werden dürfen, die für nominalskalierte Merkmale zulässig sind. Da dieser Fall gemischtskalierter Untersuchungsmerkmale in der Praxis häufig anzutreffen ist, kommt den darzustellenden Verfahren eine nicht zu unterschätzende Bedeutung zu.

3 DIE GRUNDLAGEN DER BESTIMMUNG MULTIVARIATER ZUSAMMENHÄNGE ZWISCHEN NOMINALSKALIERTEN DATEN

3.1 Die Darstellung von mehrfach-nominalskalierten Daten in Form einer Kontingenztabelle

Bei der Überprüfung von Abhängigkeiten zwischen mehreren Merkmalen liegen im Falle nominalskalierter Daten einzelne Untersuchungsobjekte vor, die unterschiedliche Ausprägungen der verschiedenen Untersuchungsmerkmale aufweisen und die nach diesen Ausprägungen klassifiziert werden können. Die sich bei gleichzeitiger Untersuchung mehrerer Merkmale ergebenden Mehrfachklassifikationen lassen sich am übersichtlichsten in Form von A s s o z i a t i o n s t a b e l l e n [1] oder von K o n t i n g e n z t a b e l l e n [2] darstellen.

Es bestehe ein Merkmal I mit den Ausprägungen I_i, $(i=1,2,3,\ldots,r)$ und ein Merkmal J mit den Ausprägungen J_j, $(j=1,2,3,\ldots,c)$[3]. Angenommen, man klassifiziert eine Gruppe von n Untersuchungsobjekten

---

1 Unter einer Assoziationstabelle versteht man die Darstellung der Klassifikation zweier dichotomer Merkmale.

2 Über den Begriff der Kontingenztabelle vgl.: SACHS, L.: Statistische Auswertungsmethoden, 3. neubearbeitete und erweiterte Aufl. mit neuer Bibliographie, Berlin - Heidelberg - New York 1972, S. 357 ; JESDINSKI, E.: Mehrdimensionale Kontingenztafeln, in : WALTER, E.: Statistische Methoden II : Mehrvariable Methoden und Datenverarbeitung, Berlin - Heidelberg - New York 1970, S. 9 .

3 Bei der Bezeichnung der Laufindices wird dem Vorgehen in der Literatur gefolgt. Dort wird die Anzahl der Ausprägungen des Zeilenmerkmals mit "r" (von row=Zeile), die des Spaltenmerkmals mit "c" (von coloumn=Spalte) und die des Schichtenmerkmals mit "l"(von layer=Schicht) bezeichnet. Zur besseren Unterscheidung wird "ℓ" statt "l" verwandt.

nach den r Ausprägungen des Merkmals I und gleichzeitig nach den c Ausprägungen des Merkmals J, so läßt sich das Ergebnis der Untersuchung in der als Tab. 1 bezeichneten zweidimensionalen Kontingenztabelle wiedergeben.

Tab. 1 : Allgemeine Darstellung einer zweidimensionalen Kontingenztabelle

Merkmal I \ Merkmal J	J_1	J_2	..	J_j	..	J_c	$\sum$
I_1	n_{11}	n_{12}	..	n_{1j}	..	n_{1c}	$n_{1.}$
I_2	n_{21}	n_{22}	..	n_{2j}	..	n_{2c}	$n_{2.}$
:	:	:		:		:	:
I_i	n_{i1}	n_{i2}	..	n_{ij}	..	n_{ic}	$n_{i.}$
:	:	:		:		:	:
I_r	n_{r1}	n_{r2}	..	n_{rj}	..	n_{rc}	$n_{r.}$
$\sum$	$n_{.1}$	$n_{.2}$	..	$n_{.j}$	..	$n_{.c}$	n

Bei der Angabe der n_{ij} bezieht sich der erste Index auf das Zeilenmerkmal I und der zweite Index auf das Spaltenmerkmal J.

Für die Zeilensummen gilt in dieser Kontingenztabelle

$$n_{i.} = \sum_{j=1}^{c} n_{ij} \quad \begin{matrix} i=1,2,3,\ldots,r \\ j=1,2,3,\ldots,c \end{matrix} \qquad (3.1\text{-}1)$$

und analog für die Spaltensummen

$$n_{.j} = \sum_{i=1}^{r} n_{ij} \qquad (3.1\text{-}2),$$

und schließlich

$$\sum_{i=1}^{r} n_{i.} = \sum_{j=1}^{c} n_{.j} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} n_{ij} = n \quad (3.1\text{-}3).$$

In gleicher Weise lassen sich auch drei- und mehrdimensionale Kontingenztabellen konstruieren. Angenommen, an den n Untersuchungsobjekten werden gleichzeitig das Merkmal I mit den Ausprägungen I_i, (i=1, 2,3,...,r), das Merkmal J mit den Ausprägungen J_j, (j=1,2,3,...,c), und das Merkmal K mit den Ausprägungen K_k, (k=1,2,3,...,ℓ) festgestellt, dann läßt sich die Dreifachklassifizierung wie in der als Tab. 2 wiedergegebenen dreidimensionalen Kontingenztabelle darstellen. Bei dieser Angabe der n_{ijk} bezieht sich der erste Index auf das Zeilenmerkmal I, der zweite auf das Spaltenmerkmal J und der dritte auf das Schichtenmerkmal K.

Hierbei gelten die folgenden Summationsbedingungen:

$$n_{i..} = \sum_{j=1}^{c} n_{ij.} = \sum_{k=1}^{\ell} n_{i.k} = \sum_{j=1}^{c} \sum_{k=1}^{\ell} n_{ijk} \quad (3.1\text{-}4),$$

i=1,2,3,...,r, j=1,2,3,...,c, k=1,2,3,...,ℓ . Entsprechendes gilt für die Spaltenrandsummen $n_{.j.}$ und die Schichtenrandsummen $n_{..k}$. Analog zu Beziehung (3.1-3) gilt in der dreidimensionalen Kontingenztabelle

$$\sum_{i=1}^{r} n_{i..} = \sum_{j=1}^{c} n_{.j.} = \sum_{k=1}^{\ell} n_{..k} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \sum_{k=1}^{\ell} n_{ijk} = n \quad (3.1\text{-}5).$$

Tab. 2 : Allgemeine Darstellung einer dreidimensionalen Kontingenztabelle

Merkmal K / Merkmal J / Merkmal I	K_1					K_2					..	K_k						K_ℓ					$\sum$
	J_1	.	J_j	.	J_c	J_1	.	J_j	.	J_c	..	J_1	.	J_j	.	J_c	..	J_1	.	J_j	.	J_c	
I_1	n_{111}	..	n_{1j1}	..	n_{1c1}	n_{112}	..	n_{1j2}	..	n_{1c2}	..	n_{11k}	..	n_{1jk}	..	n_{1ck}	..	$n_{11\ell}$	..	$n_{1j\ell}$	..	$n_{1c\ell}$	$n_{1..}$
I_2	n_{211}	..	n_{2j1}	..	n_{2c1}	n_{212}	..	n_{2j2}	..	n_{2c2}	..	n_{21k}	..	n_{2jk}	..	n_{2ck}	..	$n_{21\ell}$	..	$n_{2j\ell}$	..	$n_{2c\ell}$	$n_{2..}$
:	:		:		:	:		:		:		:		:		:		:		:		:	:
I_i	n_{i11}	..	n_{ij1}	..	n_{ic1}	n_{i12}	..	n_{ij2}	..	n_{ic2}	..	n_{i1k}	..	n_{ijk}	..	n_{ick}	..	$n_{i1\ell}$	..	$n_{ij\ell}$	..	$n_{ic\ell}$	$n_{i..}$
:	:		:		:	:		:		:		:		:		:		:		:		:	:
I_r	n_{r11}	..	n_{rj1}	..	n_{rc1}	n_{r12}	..	n_{rj2}	..	n_{rc2}	..	n_{r1k}	..	n_{rjk}	..	n_{rck}	..	$n_{r1\ell}$	..	$n_{rj\ell}$	..	$n_{rc\ell}$	$n_{r..}$
$\sum$	$n_{.11}$	..	$n_{.j1}$	..	$n_{.c1}$	$n_{.12}$	..	$n_{.j2}$	..	$n_{.c2}$	..	$n_{.1k}$	..	$n_{.jk}$	..	$n_{.ck}$	..	$n_{.1\ell}$	..	$n_{.j\ell}$	..	$n_{.c\ell}$	n

Die Behandlung der Unabhängigkeitstests in den folgenden Kapiteln wird sich auf die Auswertung dreidimensionaler Kontingenztabellen der dargestellten Art beziehen.

Die Dreifach-Klassifikation von Daten in Form einer Kontingenztabelle soll nun anhand von Modellbeispiel 1 verdeutlicht werden. 1.000 zufällig ausgewählte Unternehmen werden gleichzeitig danach unterschieden,

(1) in welcher R e c h t s f o r m sie betrieben werden (Merkmal I), wobei die Ausprägungen
I_1 : Kapitalgesellschaft und
I_2 : Personengesellschaft
möglich sind;

(2) wie die G e w i n n e n t w i c k l u n g der letzten beiden Jahre war (Merkmal J), wobei die Ausprägungen
J_1 : Gewinnentwicklung sinkend und
J_2 : Gewinnentwicklung konstant oder steigend
möglich sind;

(3) ob in den Unternehmen die M i t b e s t i m m u n g [1)] praktiziert wird (Merkmal K), wobei die Ausprägungen
K_1 : Mitbestimmung wird nicht praktiziert und
K_2 : Mitbestimmung wird praktiziert
möglich sind.

Bei der Klassifikation habe sich das in Tab. 3 wiedergegebene Ergebnis gezeigt.

Diese Untersuchungsergebnisse lassen sich auch anschaulich in graphischer Form als Kontingenzwürfel

---

1 Die Art der unterstellten Mitbestimmung soll hier nicht näher diskutiert werden.

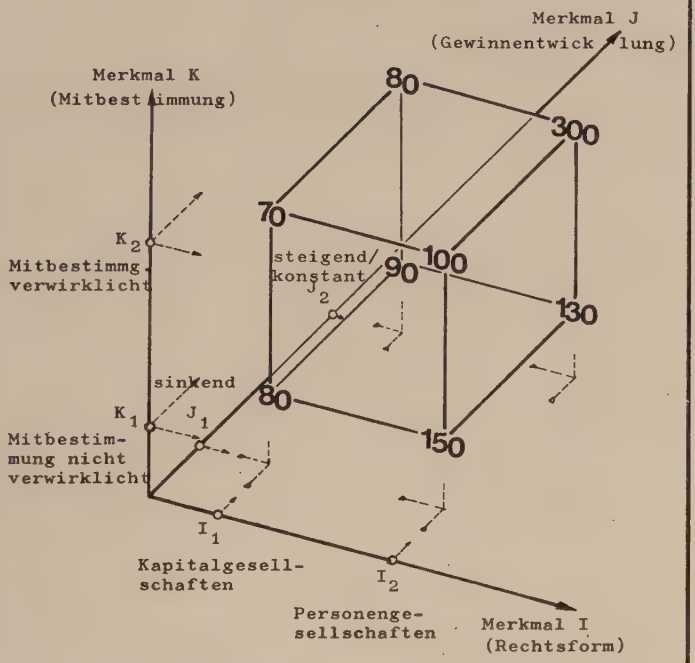
darstellen, wie in Abb. 1 für Modellbeispiel 1 wiedergegeben.

Tab. 3 : Klassifikation des Modellbeispiels 1 von 1.000 Unternehmen nach den Merkmalen Rechtsform, Gewinnentwicklung und Mitbestimmung

Mitbestimmung / Gewinnentwicklung / Rechtsform	wird nicht praktiziert		wird praktiziert		
	sinkend	konstant oder steigend	sinkend	konstant oder steigend	Σ
Kapitalgesellschaft	80	90	70	80	320
Personengesellschaft	150	130	100	300	680
Σ	230	220	170	380	1000

Das Modellbeispiel 1 wird für die Diskussion der Begriffe "Zusammenhang" und "Unabhängigkeit" in Abschnitt 3.2 und für die Darstellung der verschiedenen Unabhängigkeits-Testverfahren verwandt.

Abb. 1 : Kontingenzwürfel der Klassifikation von 1000 Unternehmen nach den Merkmalen "Rechtsform", Gewinnentwicklung" und "Mitbestimmung"



3.2 Der Begriff des Zusammenhangs zwischen statistischen Merkmalen

3.2.1 Abgrenzung des Begriffs des Zusammenhangs

Die einzelnen Ereignisse und Daten der ökonomischen Realität lassen sich in den seltensten Fällen isoliert betrachten, analysieren und interpretieren. Ständig muß die Interdependenz zu anderen Daten und

Ereignissen erkannt, beurteilt und bei der Analyse berücksichtigt werden.

Beeinflussen sich zwei oder mehr als zwei Merkmale der ökonomischer Realität einseitig oder gegenseitig, wird also die Ausprägung eines Merkmals von den Ausprägungen anderer Merkmale bestimmt oder zumindest mitbestimmt, so kann man die zwischen den Merkmalen bestehende Beziehung als Z u s a m m e n h a n g bezeichnen.

Ist das Auftreten einer bestimmten Ausprägung eines Merkmals eindeutig durch das Auftreten bestimmter Ausprägungen anderer Merkmale determiniert, so besteht zwischen den Merkmalen ein d e t e r m i n i s t i s c h e r oder funktionaler Zusammenhang. Deterministische Zusammenhänge sind in den Naturwissenschaften von großer Bedeutung. In den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften können sie allerdings wegen der vielschichtigen Verflechtungen der relevanten Variablen kaum nachgewiesen werden.

Beeinflussen hingegen die Ausprägungen eines Merkmals I die Ausprägungen eines Merkmals J in der Weise, daß bei Vorliegen der Ausprägung I_i, $(i=1,2,3,\ldots,r)$, die Ausprägung J_j, $(j=1,2,3,\ldots,c)$, mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit w_j zu erwarten ist, so besteht zwischen den Merkmalen ein s t o c h a s t i s c h e r Zusammenhang. Jeder Ausprägung des Merkmals I steht nun eine bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ausprägungen des Merkmals J gegenüber, wobei die Wahrscheinlichkeitsverteilung der J_j mit den Ausprägungen des Merkmals I variiert. Stochastische Zusammenhänge können auch zwischen

mehr als zwei Merkmalen bestehen. Die Aufdeckung solcher stochastischer Zusammenhänge und ihre Analyse ist ein statistisches Problem. Zur Bewältigung dieses Problemkomplexes wurde eine große Zahl unterschiedlichster statistischer Verfahren entwickelt.

Bei der Charakterisierung von Zusammenhängen erscheint eine weitere begriffliche Unterscheidung von Bedeutung : Sollen die zwischen mehreren Merkmalen bestehenden Wechselbeziehungen untersucht werden, befaßt man sich mit der Analyse der I n t e r d e p e n d e n z. Sollen aber "gerichtete" Beziehungen zwischen Merkmalen erkannt werden, soll also nicht nur der Einfluß von Merkmalen auf andere Merkmale, sondern auch die Einflußrichtung analysiert werden, spricht man von D e p e n d e n z zwischen den Merkmalen. In diesem Falle kann man Merkmale als a b h ä n g i g oder u n a b h ä n g i g von anderen Merkmalen charakterisieren.

Aufgrund dieser Unterscheidung ergeben sich verschiedene Analyseformen von Zusammenhängen. Verallgemeinernd kann man sagen, daß die Analyse der Interdependenz Gegenstand der K o r r e l a t i o n s a n a l y s e im engeren Sinne ist und daß die Analyse der Dependenz mit Verfahren der R e g r e s s i o n s a n a l y s e durchgeführt werden kann[1].

Da die Regressionsanalyse metrisch skalierte Daten voraussetzt und somit auf dem Meßniveau der Nominalskala nicht anwendbar ist, beschränkt sich die vorliegende Arbeit auf die Darstellung derjenigen

1 Vgl. hierzu z.B.: KENDALL, M. G. und STUART, A.: The advanced theory of statistics, Vol. 2 - Inference and relationship, London 1961, S. 279 .

Verfahren der Korrelationsanalyse, die auf nominalskalierte Daten anwendbar sind, nämlich das χ^2-Verfahren und das informationstheoretische Verfahren mit deren Varianten.

Diese untersuchen im einzelnen die folgenden Problemkreise :

(1) Prüfung des Vorhandenseins von Zusammenhängen zwischen mehreren nominalskalierten Merkmalen und Beurteilung eines erkannten Zusammenhangs auf Zufälligkeit beziehungsweise Überzufälligkeit hin. Die verschiedenen Arten der Zusammenhänge werden noch näher zu definieren sein.

(2) Prüfung der Stärke nachgewiesener Zusammenhänge und, soweit möglich, Beurteilung auf Zufälligkeit beziehungsweise Überzufälligkeit hin. Oft spricht man hierbei von der Analyse der A s s o z i a t i o n . Dieser Begriff ist aber insofern zweideutig, als die Assoziationsanalyse im engeren Sinne die Messung der Stärke eines Zusammenhanges zwischen zwei jeweils dichotomen Merkmalen beinhaltet. Die Bestimmung der Stärke des Zusammenhangs zwischen mehrfach untergliederten Merkmalen ist Gegenstand der Analyse der K o n t i n g e n z [1].

Eine weitere Abgrenzung von Zusammenhangsbegriffen soll wie folgt vorgenommen werden :

(1) Einfache Zusammenhänge, die dann vorliegen, wenn die Ausprägungen eines Merkmals oder Merkmalskomplexes nicht unabhängig sind von den Ausprägungen anderer Untersuchungsmerkmale; und

(2) Zusammenhänge höherer Ordnung, die dann vorliegen, wenn Merkmale oder Merkmalskomplexe

---

1 Vgl. zu diesen Begriffsabgrenzungen : KENDALL, M. G. und BUCKLAND, W. R.: A dictionary of statistical terms, 3rd Edition, Edinburgh 1971, S. 6 .

die S t ä r k e des Zusammenhangs zwischen weiteren Merkmalen beeinflussen.

Wegen der großen Bedeutung dieser Begriffsinhalte für die weitere Darstellung der Unabhängigkeits-Prüfverfahren für nominalskalierte Daten sollen sie in den beiden nachfolgenden Unterabschnitten noch intensiver untersucht werden.

3.2.2 Der Begriff des einfachen Zusammenhangs zwischen nominalskalierten Merkmalen

Von einem einfachen Zusammenhang als Abgrenzung gegen den in Unterabschnitt 3.2.3 zu erläuternden Begriff des Zusammenhangs höherer Ordnung, soll im folgenden gesprochen werden, wenn die Hypothese einfacher Unabhängigkeit abgelehnt werden muß. Einfache Unabhängigkeit zwischen mehreren Merkmalen liegt dann vor, wenn das gemeinsame Auftreten der Ausprägungen der Merkmale stochastisch-unabhängig im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist. Mit anderen Worten wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Merkmalsausprägungen eines Merkmals I von den verschiedenen Ausprägungen der Merkmale J und K nicht beeinflußt.

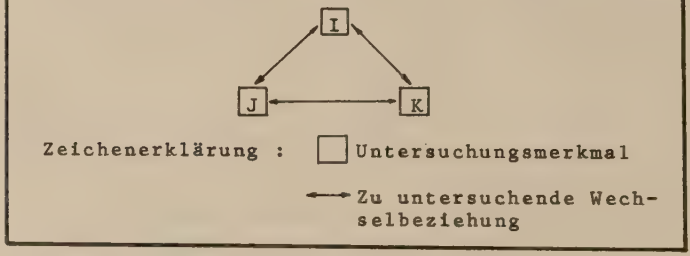
Untersucht man zum Beispiel die Beziehungen der Merkmale I, J und K mit den Ausprägungen I_i, $(i=1,2,3,\ldots,r)$, J_j, $(j=1,2,3,.8.,c)$ und K_k, $(k=1,2,3,\ldots, \ell)$, zueinander, so gilt nach dem Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung als eine mögliche Bedingung einfacher stochastischer Unabhängigkeit :

$$W(I_i \cap J_j \cap K_k) = w_i \cdot w_j \cdot w_k \qquad (3.2.2\text{-}1).$$

In dieser Gleichung bedeutet w_i die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Ausprägung I_i des Merkmals I und analog für w_j und w_k. Die in dieser Gleichung ausgedrückte Art einfacher Unabhängigkeit bezeichnet man zur Abgrenzung gegen andere Unabhängigkeitsbedingungen als t o t a l e Unabhängigkeit. Im Rahmen des Modellbeispiels 1[1)] wäre hier zu untersuchen, ob sich die Rechtsform, die Gewinnentwicklung und die Mitbestimmung der betrachteten Unternehmen gegenseitig beeinflussen.

Die Analyse der totalen Unabhängigkeit beinhaltet die Auswertung einer Kontingenztabelle oder eines Kontingenzwürfels mittels eines später näher zu erläuternden Testverfahrens. Die Zielrichtung dieses Testverfahrens läßt sich graphisch wie in Abb. 2 veranschaulichen.

Abb. 2 : Die Wechselbeziehungen zwischen den Merkmalen I, J und K im Falle totaler Abhängigkeit



Bei der Untersuchung einfacher Zusammenhänge lassen sich bei Problemstellungen mit drei oder mehr als drei Merkmalen neben der Hypothese totaler Unabhängigkeit noch weitere Unabhängigkeitsfragestel-

1 Vgl. die Erläuterungen zu Modellbeispiel 1 auf S. 24 ff. .

lungen analysieren.

So läßt sich untersuchen, ob zwischen den Untersuchungsmerkmalen m u l t i p l e Unabhängigkeit besteht. Darunter versteht man die Unabhängigkeit zwischen einem Merkmal I einerseits und einem Merkmalskomplex (J,K) andrerseits. Für das Modellbeispiel 1[1] könnten beispielsweise die folgenden Unabhängigkeitshypothesen geprüft werden :

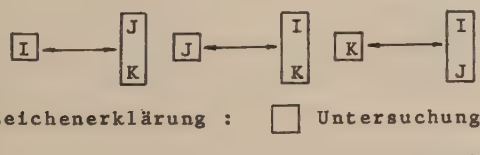
(1) Beeinflussen sich die Rechtsform der Unternehmen einerseits und die Gewinnentwicklung und die Mitbestimmung andrerseits gegenseitig ?

(2) Beeinflussen sich die Gewinnentwicklung der Unternehmen einerseits und die Rechtsform und die Mitbestimmung andrerseits gegenseitig ?

(3) Beeinflussen sich die Mitbestimmung in den Unternehmen einerseits und die Rechtsform und die Gewinnentwicklung andrerseits gegenseitig ?

Die Art der zu untersuchenden Wechselbeziehungen bei multiplen Unabhängigkeitstests läßt sich graphisch wie in Abb. 3 verdeutlichen.

Abb. 3 : Die Wechselbeziehungen zwischen den Merkmalen I, J und K im Falle multipler Abhängigkeiten



1 Vgl. die Erläuterungen zu Modellbeispiel 1 auf S. 24 ff. .

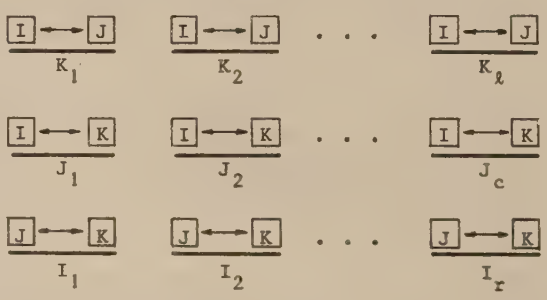
Eine weitere mögliche Problemstellung im Rahmen der Untersuchung der einfachen Unabhängigkeit ist die der p a r t i e l l e n Unabhängigkeit. Darunter versteht man die Unabhängigkeit zwischen zwei Merkmalen bei einer bestimmten Ausprägung des dritten Merkmals. Für Modellbeispiel 1[1)] könnte man beispielsweise untersuchen, ob sich

(1) Gewinnentwicklung und Rechtsform der Unternehmen beeinflussen, wenn die Mitbestimmung nicht praktiziert wird ?

(2) Gewinnentwicklung und Rechtsform der Unternehmen beeinflussen, wenn die Mitbestimmung praktiziert wird.

Analog lassen sich auch andere partielle Unabhängigkeitshypothesen überprüfen. Die Art der bei partiellen Unabhängigkeitsanalysen zu untersuchenden Wechselbeziehungen läßt sich gemäß Abb. 4 veranschaulichen.

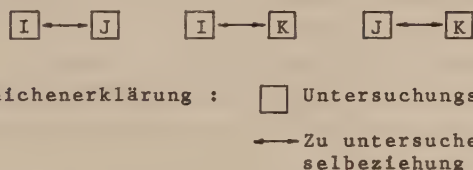
Abb. 4 : Die Wechselbeziehungen zwischen den Merkmalen I, J und K im Falle partieller Abhängigkeiten



1 Vgl. die Erläuterungen zu Modellbeispiel 1 auf S. 24 ff. .

Schließlich lassen sich auch im Rahmen dreidimensionaler Problemstellungen einfache u n b e d i n g t e Z w e i f a c h - Unabhängigkeiten überprüfen, indem man das dritte Merkmal bei der Analyse unberücksichtigt läßt. Die Art der zu untersuchenden Wechselbeziehungen bei Tests auf unbedingte Zweifachunabhängigkeit läßt sich graphisch wie in Abb. 5 darstellen.

Abb. 5 : Die Wechselbeziehungen zwischen den Merkmalen I, J und K im Falle unbedingter Zweifachabhängigkeiten



Die Testverfahren für die Untersuchung einfacher Unabhängigkeiten zwischen nominalskalierten Merkmalen bauen auf der Überprüfung von Unabhängigkeitsbedingungen auf, wie sie in Gleichung (3.2.2-1) exemplarisch für den Fall totaler Unabhängigkeit formuliert wurden. Die Behandlung dieser Problemstellung erfolgt im vierten Kapitel dieser Arbeit.

3.2.3 Der Begriff des Zusammenhangs höherer Ordnung zwischen nominalskalierten Merkmalen

Bei der Untersuchung von drei nominalskalierten Merkmalen bietet sich, wie oben angesprochen, eine weitere Möglichkeit der Unabhängigkeitsanalyse

an. Neben den in Unterabschnitt 3.2.2 untersuchten Fragestellungen kann man auch das Problem untersuchen,ob ein Merkmal den Zusammenhang zwischen den übrigen Merkmalen beeinflußt, ob also ein Zusammenhang höherer Ordnung besteht. Im Rahmen des Modellbeispiels 1[1)] könnte man hier fragen, ob und gegebenfalls wie der Zusammenhang zwischen der Rechtsform und der Mitbestimmung von der Gewinnentwicklung mitbestimmt wird. Unabhängigkeit höherer Ordnung liegt immer dann vor, wenn die Beziehungen zwischen zwei Merkmalen I und J unabhängig sind von dem wie auch immer gearteten Auftreten des dritten Merkmals K, wenn also die Stärke des Zusammenhangs zwischen den Merkmalen I und J bei allen Ausprägungen des Merkmals K gleich bleibt[2)]. Die Art der hier zu untersuchenden Wechselbeziehungen läßt sich anschaulich wie in Abb. 6 darstellen.

Abb. 6 : Die Wechselbeziehungen zwischen den Merkmalen I, J und K im Falle der Abhängigkeit höherer Ordnung

Zeichenerklärung : ☐ Untersuchungsmerkmal

←·→ Bestehende Wechselbeziehung

←→ Zu untersuchende Wechselbeziehung

1 Vgl. die Erläuterungen zu Modellbeispiel 1 auf S. 24 ff. .

2 Bei mehr als drei Untersuchungsmerkmalen kann auch die Stärke des Zusammenhangs zwischen Merkmalen vom Zusammenhang zwischen den übrigen Merkmalen beeinflußt werden. Vgl. hierzu den Abschnitt 6.3 dieser Arbeit .

Die Analyse des Zusammenhangs höherer Ordnung unterscheidet sich von der Prüfung des einfachen totalen Zusammenhangs insofern, als bei letzterem nur geprüft wird, ob zwischen den einzelnen Merkmalen überhaupt irgendwelche Beziehungen bestehen. Demgegenüber liegt ein Zusammenhang höherer Ordnung vor, wenn Merkmale auf die B e z i e h u n g zwischen anderen Merkmalen einwirken.

Die Problemstellung des Zusammenhangs höherer Ordnung unterscheidet sich auch von der Prüfung des multiplen Zusammenhangs, denn bei diesem wird der Zusammenhang zwischen einem Merkmal einerseits und einem Merkmals-Komplex andrerseits geprüft, wobei nicht interessiert, ob sich die zusammengefaßten Merkmale dieses Komplexes in irgendeiner Form gegenseitig beeinflussen.

Auch die Analyse des partiellen Zusammenhangs unterscheidet sich von der Fragestellung des Zusammenhangs höherer Ordnung, da ein partieller Zusammenhang dann vorliegt, wenn sich zwei Merkmale bei vorgegebener Ausprägung des dritten Merkmals beeinflussen, während man von einem Zusammenhang höherer Ordnung spricht, wenn das dritte Merkmal allgemein auf die B e z i e h u n g e n zwischen den anderen Merkmalen Einfluß nimmt.

Zusammenhänge höherer Ordnung haben ein gewisses dynamisches Element in sich, da hier untersucht wird, ob sich ein Zusammenhang zwischen zwei Merkmalen während des "Durchgangs" durch alle Ausprägungen des dritten Merkmals ändert. Diese Betrachtensweise ermöglicht neben dem Nachweis des Bestehens eines Zusammenhangs höherer Ordnung auch

die Analyse, wo speziell beim "Durchgang" durch das dritte Merkmal wesentliche Veränderungen im Zusammenhang zwischen den beiden anderen Merkmalen aufgetreten sind. Dies kann zu wichtigen Aufschlüssen führen, wenn zum Beispiel bei Wähleranalysen untersucht wird ob und gegebenenfalls wann der Zusammenhang zwischen der Präferenz für eine bestimmte Partei und der Regierungspolitik beeinflußt wird vom Zeitablauf mit seiner politischen Entwicklung.

Bei der Untersuchung, ob die Beziehungen zwischen zwei Merkmalen von dem dritten Merkmal beeinflußt werden, kann man nicht mehr auf die Verfahren zur Prüfung der einfachen Zusammenhänge zurückgreifen. Bei den Analysen, die hier vorgenommen werden sollen, müssen mehrere bestehende Abhängigkeits- oder Unabhängigkeitsbeziehungen zueinander in Bezug gesetzt werden.

Bei Zusammenhängen höherer Ordnung ergibt sich aus der Anzahl der zu untersuchenden Merkmale die "Höhe" der Ordnung. So kann man bei drei Merkmalen einen Zusammenhang zweiter Ordnung, bei vier Merkmalen Zusammenhänge zweiter und dritter Ordnung[1] untersuchen. Analysiert man allgemein m Merkmale, so lassen sich diese jeweils auf Unabhängigkeit 2., 3., ... , (m-1). Ordnung prüfen.

Die Behandlung der Zusammenhänge höherer Ordnung erfolgt in der Literatur unter verschiedenen Bezeichnungen. Im angelsächsischen Schrifttum wird hier meist der Begriff der h i g h e r o r d e r i n t e r a c t i o n verwandt, während sich in

---

1 Bei Untersuchungen von vier und mehr als vier Merkmalen ergeben sich wiederum mehrere Testverfahren zur Prüfung der verschiedenen Arten von Zusammenhängen dritter und höherer Ordnung. Vgl. die entsprechenden Ausführungen des Abschnitts 6.3 .

der deutschsprachigen Literatur die Begriffe I n t e r a k t i o n und m e h r f a c h e W e c h s e l w i r k u n g e n finden[1], wobei diese Begriffe aber keinesfalls konsistent verwandt werden. Die herrschende Unsicherheit über den Inhalt von "Interaction", "Interaktion" oder "Wechselwirkungen" hat im wesentlichen zwei Ursachen :

(1) Der Ausgangspunkt der Betrachtung ist für viele Autoren unterschiedlich. Versuchen die einen, Gedanken der Varianzanalyse auf die Analyse mehrdimensionaler Kontingenztabellen zu übertragen, so bemühen sich andere darum, den mathematischen Wahrscheinlichkeitsbegriff auf die Probleme mehrerer Dimensionen zu erweitern.

---

1 Vgl. hierzu, ohne daß dieser Hinweis vollständig sein könnte : BARTLETT, M. S.: Contingency table interactions, JRSS Supplement 2 (1935), S. 248 ff.; DARROCH, J. N.: Interactions in multi-factor contingency tables, JRSS(B) 24 (1962), S. 251 ff.; FIENBERG, S. E.: The analysis of multidimensional contingency tables, Ecology 51 (1970), S. 419 ff.; GOOD, I. J.: Maximum entropy for hypothesis formulation, especially for multidimensional contingency tables, AMS 34 (1963), S. 911 ff.; GOODMAN, L. A.: mit einer Vielzahl von Abhandlungen zu diesem Thema, z.B.: Simple methods for analyzing threefactor interaction in contingency tables, JASA 59 (1964), S. 319 ff.; Derselbe : Interactions in multidimensional contingency tables, AMS 35 (1964), S. 632 ff.; KASTENBAUM, M. A. und LAMPHIEAR, D. E.: Calculation of chi-square to test the no three-factor interaction hypothesis, Biometrics 15 (1959), S. 107 ff.; KU, H. H., VARNER, R. N. und KULLBACK, S.: On the analysis of multidimensional contingency tables, JASA 66 (1971), S. 55 ff.; KULLBACK, S.: Information theory and statistics, New York - London 1959; LANCASTER, H. O.: Complex contingency tables treated bei the partition of χ^2, JRSS(B) 13 (1951), S. 242 ff.; NORTON, H. W.: Calculation of chi-square for complex contingency tables, JASA 40 (1945), S. 251 ff.; PLACKETT, R. L.: A note on interactions in contingency tables, JRSS(B) 24 (1962), S. 162 ff.; ROY, S. N. und KASTENBAUM, M. A.: On the hypothesis of no "interaction" in a multi-way contingency table, AMS 27 (1956), S. 749 ff.; SIMPSON, E. H.: The interpretation of interaction in contingency tables, JRSS(B) 13 (1951), S. 238 ff. .

(2) Es herrscht große Unsicherheit darüber, wie der Tatbestand des Zusammenhangs höherer Ordnung in der praktischen Anwendung sachbezogen zu interpretieren sei. VICTOR meint in diesem Zusammenhang sogar[1], daß das Prüfen entsprechender Hypothesen für sich allein zu sachlich nicht interpretierbaren Aussagen führe, die ganze Analyse also wenig Sinn habe. Diese Schwierigkeit erklärt sich zum Teil aus den unter (1) angesprochenen unterschiedlichen Ausgangspunkten. Zum anderen ergibt sich dies aus der Tatsache, daß bisher kaum Versuche unternommen wurden, die entsprechenden mathematisch-statistischen Modelle auf eine praktische Anwendung zu beziehen um so sachliche Interpretationsmöglichkeiten zu suchen.

Die lange und sehr heftige Diskussion um den Inhalt des Begriffes des Zusammenhangs höherer Ordnung hat zu den verschiedensten Standpunkten in dieser Frage geführt, ja man konnte in den 50er Jahren und Anfang der 60er Jahre regelrechte "Schulen" der verschiedenen Begriffsinhalte feststellen. Erst in jüngster Zeit bemühte man sich verstärkt darum, die verschiedenen Ansätze auf eventuelle gemeinsame Grundlagen hin zu überprüfen[2].

Die in der vorliegenden Arbeit vorgenommene Deutung des Begriffs des Zusammenhangs höherer Ordnung ergab sich aus dem Versuch, die Gemeinsamkeiten der verschiedenen Ansätze zu betonen und zudem eine sachbezogene, sinnvolle Interpretationsmöglichkeit für diesen Tatbestand aufzuzeigen.

---

1 Vgl. VICTOR, N.: Analyse mehrdimensionaler Kontingenztafeln, Dissertation, Mainz 1970, S.27 u.S.41.

2 Vgl. z.B.: KU, H. H. und KULLBACK, S.: Interaction in multidimensional contingency tables : an information theoretic approach, Journal of Research of the national Bureau of Standards 72B (1968), S. 161 ff. .

Um dies klar herauszustellen wurde auch der Terminus des "Zusammenhangs höherer Ordnung" als deutliche Abgrenzung gegenüber den anderen erwähnten Begriffen und ihren nicht eindeutigen Inhalten eingeführt.

Die Behandlung der Testverfahren zu diesem Problemkreiserfolgt im fünften Kapitel dieser Arbeit.

4 DIE PRÜFUNG EINFACHER ZUSAMMENHÄNGE ZWISCHEN DREI NOMINALSKALIERTEN MERKMALEN

4.1 Das Grundmodell der Prüfung einfacher Unabhängigkeit zwischen nominalskalierten Merkmalen

Um das Grundmodell zur Prüfung der einfachen Unabhängigkeit zwischen verschiedenen Merkmalen möglichst verständlich erklären zu können, soll es im folgenden anhand eines Beispiels mit zwei Merkmalen dargestellt werden[1].

Gegeben seien die Merkmale I mit den Ausprägungen I_1 und I_2 und J mit den Ausprägungen J_1 und J_2. Beide Merkmale werden gemeinsam an N empirischen Objekten festgestellt. Die gemeinsame Verteilung der N Objekte auf die einzelnen Merkmalsausprägungen läßt sich in der Assoziationstabelle

I \ J	J_1	J_2	$\sum$
I_1	N_{11}	N_{12}	$N_{1.}$
I_2	N_{21}	N_{22}	$N_{2.}$
$\sum$	$N_{.1}$	$N_{.2}$	N

erfassen. Alle angeführten Beobachtungswerte N_{ij}, $N_{i.}$, $N_{.j}$ und N, (i=1,2; j=1,2) seien absolute Häufigkeiten.

---

1 Im Rahmen von Beispielen mit drei Merkmalen ergeben sich mehrere Grundmodelle, je nachdem ob man Unabhängigkeit im totalen, multiplen, partiellen oder unbedingt-zweifachen Sinn untersucht. Die Erläuterung dieser Unabhängigkeitsmodelle erfolgt in den Unterabschnitten 4.2.2 - 4.2.5 .

Wenn für die beobachtete Gruppe von Untersuchungsobjekten zwischen dem Auftreten der beiden Merkmale Unabhängigkeit bestehen soll, dann muß der Anteil der Merkmalsträger I_1 bei den Merkmalsträgern J_1 genauso groß sein, wie der Anteil der Merkmalsträger I_1 bei denjenigen der J_2, das heißt :

$$\frac{N_{11}}{N_{.1}} \stackrel{!}{=} \frac{N_{12}}{N_{.2}} \qquad (4.1\text{-}1)$$

Damit gilt aber im Falle der Unabhängigkeit auch :

$$\frac{N_{11}}{N_{.1}} \stackrel{!}{=} \frac{N_{1.}}{N} \qquad (4.1\text{-}2)$$

Aus Gleichung (4.1-2) läßt sich ermitteln, wie groß N_{11} im Falle der Unabhängigkeit zwischen I und J sein müßte :

$$N_{11} = \frac{N_{1.} \cdot N_{.1}}{N} \qquad (4.1\text{-}3).$$

Wenn man nun annimmt, daß das Auftreten der beiden Merkmale voneinander nicht unabhängig ist, so muß die Häufigkeit des gemeinsamen Auftretens der beiden Merkmale abweichen von derjenigen, die sich für das gemeinsame Auftreten der beiden Merkmalsausprägungen im Falle der Unabhängigkeit ergeben hätte. Bezeichnet man zur Unterscheidung die tatsächlich beobachteten Häufigkeiten mit N_{ij} und die bei Unabhängigkeit zu erwartenden mit N'_{ij}, $(i=1,2;\ j=1,2)$, so gilt für den Fall der Abhängigkeit zwischen den beiden Merkmalen

$$N_{11} \neq N'_{11}, \text{ wobei } N'_{11} = \frac{N_{1.} \cdot N_{.1}}{N} \qquad (4.1\text{-}4).$$

Zur besseren Unterscheidung des Typs der Abhängigkeit[1] kann man, wenn

$$N_{11} > \frac{N_{1.} \cdot N_{.1}}{N}$$

von A s s o z i a t i o n sprechen, ergibt sich dagegen

$$N_{11} < \frac{N_{1.} \cdot N_{.1}}{N}$$

bezeichnet man die Beziehung zwischen den Merkmalen als D i s s o z i a t i o n[2].

Das soeben dargestellte Grundmodell ermöglicht auch dann den Nachweis von Abhängigkeit in Grundgesamtheiten, wenn zur Überprüfung der Hypothese nur eine Stichprobe vom Umfang n, (n < N), herangezogen werden kann. Dies ist wohl die für die Praxis wichtigere Fragestellung, als die einer Vollerhebung.

---

1 Vgl.: KENDALL, M. G. und STUART, A.: The advanced theory ... , Vol. 2, a.a.O., S. 537 ff. .

2 Für den Fall einer Vollerhebung, deren Verteilung auf die Merkmale sich in einer Vierfeldertafel darstellen läßt, kann man den Grad der Assoziation bzw. Dissoziation durch den Quotienten

$$Q = \frac{N_{11}}{N'_{11}}$$

angeben. Ist dieser Quotient größer als 1, herrscht Assoziation, ist er gleich 1, herrscht Unabhängigkeit, ist er kleiner als 1, herrscht Dissoziation. Für Q als Koeffizienten der Assoziation läßt sich eine Obergrenze, für Q als Koeffizienten der Dissoziation läßt sich eine Untergrenze der Größe der Koeffizienten angeben.

Zur Prüfung der Unabhängigkeit verwendet man allgemein ein statistisches Testverfahren, dessen Gegenstand Hypothesen sind. Eine Hypothese stellt hierbei eine Annahme über die Verteilungsform einer Zufallsvariablen dar, bestimmt durch deren Parameter[1]. Die Vorgehensweise bei statistischen Testverfahren ist in der Regel die, daß man eine Nullhypothese H_o aufstellt und die Untersuchungsobjekte nach den Testvorschriften so behandelt, als wäre die Nullhypothese zutreffend. Da man die Ergebnisse des Tests, die bei Gültigkeit der Nullhypothese exakt zu erwarten wären, nach mathematisch-statistischen Regeln ermitteln kann, lassen sich diese Ergebnisse vergleichen mit denen, die sich aufgrund des Tests mit den tatsächlich beobachteten Untersuchungsobjekten ergeben haben. Aufgrund dieses Vergleiches kann man mit Hilfe eines Signifikanztests feststellen, ob das beobachtete Testergebnis nur als zufallsbedingte Abweichung von dem zu erwartenden Ergebnis interpretiert werden kann, oder ob das beobachtete Ergebnis eine signifikante Abweichung von dem zu erwartenden Ergebnis bei vorgegebem Signifikanzniveau darstellt.

Im letzteren Fall ist je nach der Art des statistischen Testverfahrens entweder nur allgemein die Nullhypothese zu verwerfen, oder es ist eine zu Beginn des Tests konkretisierte Alternativhypothese H_1 statt der Nullhypothese anzunehmen. Führt man einen statistischen Test durch, um die Abhängigkeit zwischen zwei oder mehr als zwei nominalskalierten Merkmalen in einer Grundgesamtheit aufgrund eines Stichprobenergebnisses nachzuweisen, so geht man grundsätzlich von der Nullhy-

1 Vgl. KREYSZIG, E.: Statistische Methoden und ihre Anwendung, 4. Aufl., Göttingen 1973, S. 203; FISZ, M.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, 4. durchgesehene Aufl., Berlin 1966, S. 25 .

pothese H_o aus, daß zwischen den Merkmalen Unabhängigkeit bestehe. Wird H_o aufgrund des Tests abgelehnt, wird auf Abhängigkeit zwischen den Merkmalen geschlossen.

Formuliert man für das angeführte Beispiel die Nullhypothese, so ergibt sich :

$$H_o : W(I_i \cap J_j) = w_i \cdot w_j \qquad (4.1\text{-}5)$$

$$(i=1,2,3,\ldots,r;\ j=1,2,3,\ldots,c)$$

Setzt man gemäß der LAPLACE'schen Wahrscheinlichkeitsdefinition für $w_i = p'_{i.} = (n'_{i.}/n)$, für $w_j = p'_{.j} = (n'_{.j}/n)$ und für $W(I_i \cap J_j) = p'_{ij} = (n'_{ij}/n)$, wobei die p'_{ij}, $p'_{i.}$ und $p'_{.j}$ für die unter Gültigkeit der H_o zu erwartenden Wahrscheinlichkeiten stehen, so ergibt sich für die Nullhypothese :

$$H_o : p'_{ij} = p'_{i.} \cdot p'_{.j} \qquad (4.1\text{-}6)$$

mit

$$\sum_{i=1}^{r} p'_{i.} = \sum_{j=1}^{c} p'_{.j} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} p'_{ij} = 1 \qquad (4.1\text{-}7).$$

In dieser Formulierung der Nullhypothese sind aber die Größen $p'_{i.}$ und $p'_{.j}$ nicht festgelegt. Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ausprägungen sind in Beziehung (4.1-6) eine Funktion von $(r-1)+(c-1) = r+c-2$ unbekannten Parametern. Um die unter Gültigkeit von H_o zu erwartenden und zunächst unbekannten Wahrscheinlichkeiten $p'_{i.}$ und $p'_{.j}$ zu schätzen, verwendet man ein Maximum-Likelihood-Schätzverfahren. Mit diesem Verfahren lassen sich Schätzwerte für die zu erwartenden Wahrscheinlichkeiten aus den beobachteten Wahrscheinlichkeiten ableiten[1]. Man erhält :

---

1 Vgl. z.B.: KENDALL, M. G. und STUART, A.: The advanced theory ... , Vol. 2, a.a.O., S. 547 ff. .

$$\hat{p}'_{i.} = p_{i.} = \frac{n_{i.}}{n} \qquad (4.1\text{-}8)$$

und $$\hat{p}'_{.j} = p_{.j} = \frac{n_{.j}}{n} \qquad (4.1\text{-}9).$$

Definitionsgemäß gilt dann für die unter Gültigkeit der Nullhypothese zu erwartenden absoluten Häufigkeiten n'_{ij} :

$$n'_{ij} = n \cdot p'_{ij} = \frac{n_{i.} \cdot n_{.j}}{n} \qquad (4.1\text{-}10).$$

Aus dem Vergleich der n_{ij} mit den n'_{ij} lassen sich Rückschlüsse auf die Abhängigkeit beziehungsweise Unabhängigkeit zwischen den untersuchten Merkmalen ziehen.

Sind Beobachtungshäufigkeiten nach zwei Merkmalen A und $\bar{A}$ geordnet, dient zur Erklärung der Verteilung der Beobachtungsobjekte auf die Merkmalsausprägungen bei Unabhängigkeit aufeinanderfolgender Versuche in Bezug auf die vorgegebenen Anteile θ und $(1-\theta)$ von A beziehungsweise $\bar{A}$ eine Binomialverteilung mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f_B(x;n,\theta) = \binom{n}{x} \theta^x \cdot (1-\theta)^{n-x} \qquad (4.1\text{-}11).$$

Diese Funktion gibt die Wahrscheinlichkeit an, daß bei bekannter anteilsmäßiger Verteilung der Merkmalsausprägungen θ und $(1-\theta)$ in einer Stichprobe vom Umfang n genau x Objekte mit der Ausprägung A vorkommen.

Bei mehr als zwei Merkmalsausprägungen verwendet man zur Klärung der gleichen Fragestellung eine M u l t i n o m i a l v e r t e i l u n g mit

der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f_M(n_1,n_2,\ldots,n_c) = n! \prod_{j=1}^{c} (p_j^{n_j}/n_j!) \quad (4.1\text{-}12),$$

wobei $n_j \geq 0$ und $\sum_{j=1}^{c} n_j = n$.

Diese Funktion gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß bei vorgegebener Verteilung $(p_1,p_2,\ldots,p_c)$ der c Merkmalsausprägungen in einer Stichprobe vom Umfang n genau die Verteilung der Beobachtungshäufigkeiten $(n_1,n_2,\ldots,n_c)$ zu finden ist.

Mit Hilfe der Multinomialverteilung läßt sich ein exakter Unabhängigkeitstest konstruieren[1], wenn man die unter Gültigkeit der Unabhängigkeitshypothese zu erwartenden Anteilswerte einer Untersuchungsgesamtheit $(p_1,p_2,\ldots,p_c)$ als Parameter der Multinomialverteilung vorgibt und damit die beobachtete Häufigkeitsverteilung vergleicht. Ein Beispiel möge dies verdeutlichen :

Gegeben sei die zweidimensionale Häufigkeitsverteilung

I \ J	J_1	J_2	$\sum$
I_1	20 (=n_1)	20 (=n_2)	40
I_2	10 (=n_3)	50 (=n_4)	60
$\sum$	30	70	100

.

Unter Gültigkeit der Unabhängigkeitshypothese zwischen den Merkmalen I und J ergibt sich die Verteilung der relativen Häufigkeiten, die bei Unabhängigkeit zu erwarten wären als

---

1 Vgl. z.B.: SACHS, L.: a.a.O., S. 288 ff. .

I \ J	J_1	J_2	$\sum$
I_1	0,12 ($=p_1$)	0,28 ($=p_2$)	0,4
I_2	0,18 ($=p_3$)	0,42 ($=p_4$)	0,6
$\sum$	0,3	0,7	1,0

.

Um zu prüfen, inwieweit die Abweichung zwischen Beobachtungswerten und erwarteten Häufigkeiten noch als zufällig betrachtet werden kann, ist die Wahrscheinlichkeit zu berechnen für noch extremere Abweichungen zwischen den beiden Verteilungen. Diese Wahrscheinlichkeit kann man dadurch ermitteln, daß man alle die Vierfeldertafeln aufstellt, die in dem Feld mit der geringsten Feldhäufigkeit, hier n_3, noch kleinere Werte aufweisen. Man bestimmt also mit Hilfe der Multinomialverteilung den Ausdruck

$$P_{M(n_3)} = \sum_{n_3 \leq 10} \frac{n}{n_3! \cdot n_4! \cdot n_1! \cdot n_2!} \left[p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \cdot p_4^{n_4} \right] \qquad (4.1\text{-}13)$$

Die einzelnen Ausdrücke dieser Summe können rekursiv gewonnen werden nach

$$P_{M(n_3-1)} = \frac{n!}{(n_3-1)! \cdot (n_1+1)! \cdot (n_2-1)! \cdot (n_4+1)!} \cdot \left[p_1^{(n_1+1)} \cdot p_2^{(n_2-1)} \cdot p_3^{(n_3-1)} \cdot p_4^{(n_4+1)} \right] \qquad (4.1\text{-}14).$$

Nach einigen Umformungen erhält man daraus :

$$P_{M(n_3-1)} = \frac{n_3 \cdot n_2}{(n_1+1) \cdot (n_4+1)} \cdot \frac{p_1 \cdot p_4}{p_2 \cdot p_3} \cdot P_{M(n_3)}$$

Diese Wahrscheinlichkeiten sind nun aufzusummieren, um die einseitige Fragestellung nach den Wahrscheinlichkeiten des Auftretens noch extremer besetzter Felder zu erhalten.

Für Kontingenztafeln von größerem Umfang als 2 × 2 beziehungsweise von solchen mit mehr als zwei Dimensionen ist der angegebene exakte Test allerdings kaum gangbar wegen der extremen Rechenschwierigkeiten der dann notwendigen Rekursionen. Aus diesem Grunde soll auf diesen Test nicht näher eingegangen werden, sondern es werden nachfolgend praktikable Approximationen des exakten Tests erörtert.

4.2 Die Prüfung der einfachen Unabhängigkeit zwischen drei nominalskalierten Merkmalen mit Hilfe des χ^2-Verfahrens

4.2.1 Die Darstellung des χ^2-Unabhängigkeitstests

Der χ^2-Unabhängigkeitstest soll zunächst aus Gründen der Übersichtlichkeit an folgendem zweidimensionalen Beispiel erläutert werden : Gegeben seien n Untersuchungsobjekte an denen jeweils die Merkmale I mit den Ausprägungen I_i, $(i=1,2,3,\ldots,r)$, und J mit den Ausprägungen J_j, $(j=1,2,3,\ldots,c)$, festgestellt werden. Dabei sind die n Untersuchungsobjekte als Stichprobe aus einer Grundgesamtheit vom Umfang N zu verstehen. Die gemeinsame Häufigkeitsverteilung der beiden Merkmale läßt sich in Form einer zweidimensionalen Kontingenztabelle darstellen.

Es soll festgestellt werden, ob sich aufgrund der beobachteten Stichproben-Häufigkeitsverteilung eine Aussage über die Unabhängigkeit des gemeinsamen Auftretens der jeweiligen Merkmalsausprägungen machen läßt, und zwar nicht nur für die Stichprobe, sondern auch für die Grundgesamtheit.

Ausgangspunkt des Unabhängigkeitstests ist die Nullhypothese :

H_o : Zwischen dem gemeinsamen Austreten der beiden Merkmale I und J besteht Unabhängigkeit.

Die Alternativhypothese lautet dann :

H_1 : Zwischen dem gemeinsamen Auftreten der beiden Merkmale I und J besteht Abhängigkeit.

Unter Zugrundelegung der H_o kann man, wie in Abschnitt 4.1 erläutert, die zweidimensionale Häufigkeitsverteilung der n'_{ij} schätzen, die sich ergeben würde, wenn das Auftreten des Merkmals I tatsächlich unabhängig von dem des Merkmals J wäre.

Um die Unabhängigkeit zwischen den beiden Merkmalen zu überprüfen, vergleicht man die beobachteten Häufigkeiten n_{ij} mit den unter Gültigkeit der Nullhypothese zu erwartenden Häufigkeiten n'_{ij}. Dazu bildet man die Prüfgröße

$$x^2_{ij} = \frac{(n_{ij}-n'_{ij})^2}{n'_{ij}} \qquad (4.2.1\text{-}1)$$

für alle zu vergleichenden Paare von Häufigkeiten. Durch Summation der Prüfgrößen aller verglichenen Paare von Häufigkeiten ergibt sich :

$$S^2 = x^2_{11}+x^2_{12}+\ldots+x^2_{21}+x^2_{22}+\ldots+x^2_{ij}+\ldots+x^2_{rc} \qquad (4.2.1\text{-}2).$$

Wie schon PEARSON nachgewiesen hat[1] gilt für diese Summe S^2, daß ihre Stichprobenverteilung bei genügend großem Stichprobenumfang durch eine HELMERT-PEARSON'sche χ^2-Verteilung mit ν Freiheitsgraden approximiert werden kann.

Eine derartige Verteilung läßt sich in Grundzügen wie folgt darstellen : Eine Zufallsvariable Y sei normalverteilt mit $E(Y) = \mu$ und $V(Y) = \sigma^2$. Diese Zufallsvariable läßt sich durch die Transformationsfunktion

$$Z = \frac{Y-\mu}{\sigma} \qquad (4.2.1\text{-}3)$$

in eine standardnormalverteilte Zufallsvariable Z mit $E(Z) = 0$ und $V(Z) = 1$ überführen. Definiert man nun eine weitere Zufallsvariable X^2 als

$$X^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_n^2 \qquad (4.2.1\text{-}4),$$

wobei die Z_i Werte der standardnormalverteilten Zufallsvariablen Z sind, so wird die Verteilung der Zufallsvariablen X^2 als χ^2-Verteilung mit ν Freiheitsgraden definiert[2].

Diese Verteilung dient nun als Prüfverteilung des angeführten Unabhängigkeitstests. Aus diesem Grund bezeichnet man allgemein die summierte Prüfgröße in Gleichung (4.2.1-2) mit

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} x_{ij}^2 \qquad (4.2.1\text{-}5)$$

---

1 Vgl.: PEARSON, K.: On a criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such, that it can be reasonably supposed to have arisen in random sampling, The London, Edinbourgh and Dublin philosophical magazin, Series 5, Vol. 50 (1900), S. 157 ff. .

2 Vgl. Näheres bei : FISZ, M.: a.a.O., S. 279 ff. ; VAN DER WAERDEN, B. L.: Mathematische Statistik, 2. Aufl., Berlin-Heidelberg-New York 1965, S. 194 f. .

und in Verbindung mit (4.2.1-1) ergibt sich :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(n_{ij} - n'_{ij})^2}{n'_{ij}} \qquad (4.2.1\text{-}6).$$

Mit Hilfe dieser Prüfgröße beziehungsweise ihren Variationen wird üblicherweise der χ^2-Unabhängigkeitstest durchgeführt.

Die Testgröße χ^2, die im zweidimensionalen Fall allgemein über einer Kontingenztabelle vom Umfang $r \times c$ definiert wird, ist eine Funktion der Randsummen $n_{i.}$ und $n_{.j}$, mit deren Hilfe die n'_{ij} zu bestimmen sind. Diese Parameter sind wegen der Nebenbedingung

$$\sum_{i=1}^{r} n_{i.} = \sum_{j=1}^{c} n_{.j} = n \qquad (4.2.1\text{-}7)$$

nicht unabhängig voneinander. Dadurch sind statt (r+c) Parametern der Funktion nur (r+c-1) Parameter frei wählbar. Üblicherweise wird ν, die Zahl der Freiheitsgrade eines χ^2-Tests bestimmt durch die Anzahl der Tabellenfelder vermindert um die Zahl der frei wählbaren Parameter. Das bedeutet hier :

$$\nu = r \cdot c - (r+c-1) = (r-1) \cdot (c-1) \qquad (4.2.1\text{-}8).$$

Zur weiteren Verdeutlichung dieses Testverfahrens diene das folgende Zahlenbeispiel : Eine Automobilfabrik möchte feststellen, ob ein Zusammenhang besteht zwischen dem Anstellungsstatus von Käufern ihrer Autos und der von den Käufern gewünschten Farbe der gekauften Autos. Es werden insgesamt n=500 Autofahrer in unselbständiger Stellung be-

fragt, wobei sich das folgende Ergebnis gezeigt habe :

Tab. 4 : Beobachtete Häufigkeiten des Demonstrationsbeispiels

Anstellungsstatus \ Farbe	rot	weiß	blau	Σ
Arbeiter	50	80	70	200
Angestellte	30	130	20	180
Beamte	20	90	10	120
Σ	100	300	100	500

Unter der Voraussetzung der Gültigkeit der Nullhypothese

H_o : Es besteht Unabhängigkeit zwischen dem Anstellungsstatus der Autokäufer und der von diesen gewünschten Autofarbe

lassen sich die dann zu erwartenden Häufigkeiten gemäß Gleichung (4.1-10) als Maximum-Likelihood-Schätzwerte ermitteln. Man erhält dann die folgende Kontingenztabelle :

Tab. 5 : Erwartete Häufigkeiten des Demonstrationsbeispiels

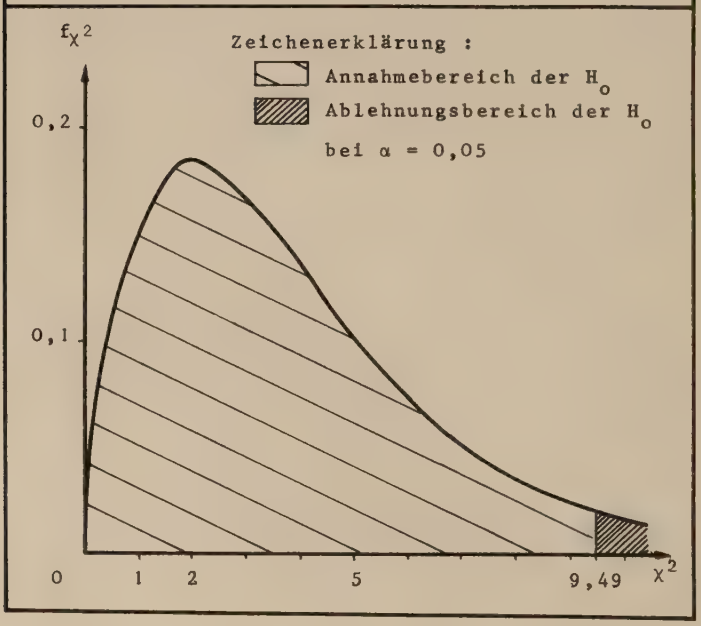
Anstellungsstatus \ Farbe	rot	weiß	blau	Σ
Arbeiter	40	120	40	200
Angestellte	36	108	36	180
Beamte	24	72	24	120
Σ	100	300	100	500

Berechnet man die Prüfgröße χ^2 gemäß (4.2.1-6),

so erhält man : $\chi^2 = 63{,}143$[1]. Die Prüfgröße χ^2 ist im vorliegenden Fall annähernd χ^2-verteilt mit $\nu = (3-1)\ (3-1) = 4$ Freiheitsgraden.

Die χ^2-Verteilung mit 4 Freiheitsgraden läßt sich wie in Abb. 7 graphisch veranschaulichen.

Abb. 7 : Darstellung der χ^2-Dichtefunktion mit $\nu = 4$ Freiheitsgraden



Ergibt sich bei einem Fehlerrisiko von $\alpha = 0{,}05$ in der beobachteten Stichprobe ein Wert der Prüfgröße

1 Bei diesem Ergebnis sowie allen nachfolgenden Ergebnissen ist zu berücksichtigen, daß sämtliche Berechnungen mit einer Genauigkeit von mindestens 8 Nachkommastellen durchgeführt wurden, sich die Wiedergabe der Ergebnisse aber zumeist auf drei oder vier Nachkommastellen beschränkt.

zwischen $\chi^2 = 0$ und $\chi^2_{c(4;0,05)} = 9,49$, so wird die Größe des χ^2-Wertes als zufallsbedingte Abweichung von dem unter Gültigkeit der Nullhypothese zu erwartenden Ergebnis von $\chi^2 = 0$ interpretiert. Übersteigt der beobachtete χ^2-Wert den kritischen Grenzwert $\chi^2_{c(4;0,05)} = 9,49$, dann gilt die beobachtete Abweichung als signifikant. In diesem Fall muß die Nullhypothese der Unabhängigkeit verworfen werden, das heißt, es wird Abhängigkeit unterstellt.

Im vorliegenden Beispiel ergab sich :

$$(\chi^2 = 63,143) > (\chi^2_{c(4;0,05)} = 9,49).$$

Es besteht mithin Abhängigkeit zwischen der Art des Anstellungsverhältnisses der befragten Personen und der von ihnen gewählten Autofarbe.

Tabellen mit Angaben der kritischen χ^2-Grenzwerte bei verschiedenen Fehlerrisiken und unterschiedlicher Zahl von Freiheitsgraden sind in jedem statistischen Tabellenwerk und in den meisten Lehrbüchern abgedruckt.

Wird die Zahl der Freiheitsgrade ≥ 30, so läßt sich die χ^2-Verteilung mit hinreichender Genauigkeit durch eine Standardnormalverteilung approximieren[1]. Nach WILSON-HILFERTY ergibt sich hierbei zur Signifikanzprüfung eines χ^2-Tests die standardnormalverteilte Prüfgröße[2]

---

1 Vgl. KENDALL, M. G. und STUART, A.: The advanced theory of statistics, Vol. 1, Distribution theory, 2. Aufl., London 1963, S. 371.

2 Vgl. WILSON, E. B. und HILFERTY, M. M.: The distribution of chi-square, Proceedings of the national academy of science 17 (1931), S. 694 ff..

$$z = \frac{\sqrt[3]{\frac{\chi^2}{\nu}} - \left(1 - \frac{2}{9\nu}\right)}{\sqrt{\frac{2}{9\nu}}} \qquad (4.2.1\text{-}9)$$

Für die Anwendbarkeit des χ^2-Unabhängigkeitstests bei nominalskalierten Merkmalen müssen allerdings die folgenden Voraussetzungen erfüllt sein[1]:

(1) Der Stichprobenumfang n muß ziemlich groß sein, da sonst die PEARSON'sche Approximation der Prüfgröße S^2 durch die χ^2-Verteilung nicht ausreicht. Allerdings ist es schwierig, anzugeben, wie groß n dabei sein sollte. YULE und KENDALL fordern[2], daß n nicht kleiner als 50 sein darf.

(2) Die unter Gültigkeit der Nullhypothese zu erwartenden Häufigkeiten dürfen nicht zu klein sein, da sonst die Güte der Approximation in Frage gestellt wird. In der Regel geht man davon aus, daß $n'_{ij} \geq 5$. VAN DER WAERDEN führt allerdings aus[3], daß nur bei $\nu = 1$ Freiheitsgrad $n'_{ij} \geq 4$ sein muß. Schon bei $\nu = 2$ Freiheitsgraden kann $n'_{ij} \geq 2$ sein, ohne daß die Approximation wesentlich schlechter wird.

(3) Die Randverteilungen aller Merkmale dürfen nur Randhäufigkeiten aufweisen, die größer als 0 sind, da sonst die χ^2-Prüfgröße offensichtlich nicht definiert ist. Sollte in praktischen Untersuchungen dieser Fall auftreten, sind Klassen von Merkmalen zusammenzufassen,

---

1 Vgl. z.B.: YULE, G. U. und KENDALL, M. G.: An introduction to the theory of statistics, 14.Aufl., 4. Nachdruck, London 1965, S. 469 ff. .

2 Vgl. YULE, G. U. und KENDALL, M. G.: a.a.O., S.469.

3 Vgl. VAN DER WAERDEN, B. L.: a.a.O., S. 234.

soweit das sachlich sinnvoll ist, oder aber die betreffende Merkmalsausprägung darf bei der Analyse nicht berücksichtigt werden.

Neben diesen Voraussetzungen sollte man bei der Anwendung des χ^2-Tests noch die folgenden Gesichtspunkte beachten :

(1) Bei einem Unabhängigkeitstest mit nur 1 Freiheitsgrad ist die Approximation der Zufallsvariablen S^2 durch eine χ^2-Verteilung nicht ausreichend genau[1]. In diesem Fall sollte man die um die YATES-Korrektur verbesserte Prüfgröße χ^2_{korr} verwenden :

$$\chi^2_{korr} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(|n_{ij}-n'_{ij}|-0,5)^2}{n'_{ij}} \qquad (4.2.1\text{-}10)$$

(2) Es ist zu beachten, daß der χ^2-Unabhängigkeitstest bei einem nicht signifikanten Testergebnis strenggenommen nur eine Aussage darüber macht, daß die unterstellte Hypothese nicht verworfen werden kann. Ob die unterstellte Hypothese der Unabhängigkeit in bezug auf die untersuchten Merkmale auch sinnvoll ist, das heißt ob zwischen den Merkmalen wirklich eine kausale Abhängigkeit bestehen kann, vermag der χ^2-Test nicht nachzuweisen. Es sollten deshalb stets genaue Vorüberlegungen über einen sinnvollen Testaufbau angestellt werden[2].

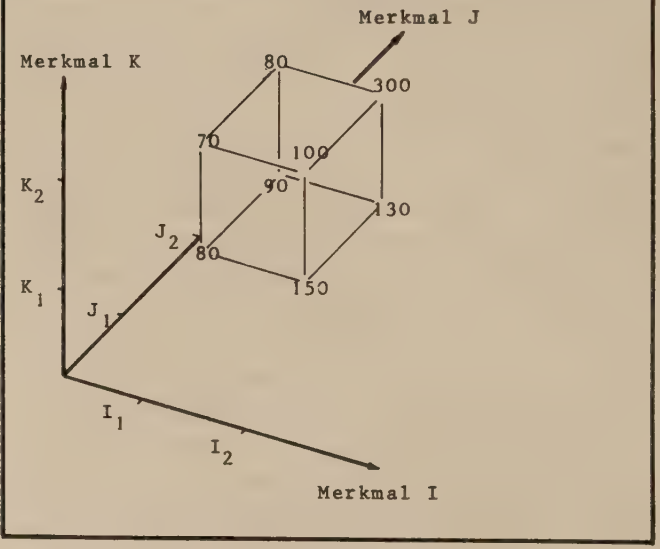
---

1 Vgl. z.B.: YATES, F.: Contingency tables involving small numbers and the χ^2-test. JRSS Supplement 1 (1934), S. 217 ff. ; LANCASTER, H. O.: The combination of probabilities arising from data in discrete distributions, Biometrika 36 (1949), S. 310 ff. .

2 Vgl. zu dieser Problematik z.B.: BREDENKAMP, J.: Der Signifikanztest in der psychologischen Forschung, Frankfurt 1972, S. 9 ff. .

Zur Prüfung der Unabhängigkeit zwischen d r e i nominalskalierten Merkmalen bedient man sich einer Ausweitung des zweidimensionalen χ^2-Unabhängigkeitstests, wobei sich verschiedene Arten von Ausweitungen ergeben, je nach der Art der zu untersuchenden Unabhängigkeit[1]. Die verschiedenen Testmöglichkeiten sollen nachfolgend abgehandelt werden und an Modellbeispiel 1[2] veranschaulicht werden. Bei diesem Beispiel geht es um die Auswertung des in Abb. 8 wiedergegebenen Kontingenzwürfels.

Abb. 8 : Kontingenzwürfel zu Modellbeispiel 1



Aus diesem Kontingenzwürfel beziehungsweise der entsprechenden Kontingenztabelle[3] ergeben sich

1 Vgl. oben die S. 30 ff. .

2 Vgl. die Erläuterungen zu Modellbeispiel 1 auf S. 24 ff. .

3 Vgl. oben S. 25

die folgenden Randsummen, die für die weiteren Ausführungen von Bedeutung sind :

$$n_{1..} = 320 \qquad n_{.1.} = 400 \qquad n_{..1} = 450$$

$$n_{2..} = 680 \qquad n_{.2.} = 600 \qquad n_{..2} = 550 \ .$$

4.2.2 Der Test auf totale Unabhängigkeit zwischen drei nominalskalierten Merkmalen

Gegeben seien die Merkmale I, J und K mit den Ausprägungen I_i, $(i=1,2,3,\ldots,r)$, sowie J_j, $(j=1,2,3,\ldots,c)$ und K_k, $(k=1,2,3,\ldots,\ell)$.

Ausgehend von den Hypothesen

H_o : Zwischen den Merkmalen I, J und K besteht Unabhängigkeit

und

H_1 : Zwischen den Merkmalen I, J und K besteht Abhängigkeit

kann die Nullhypothese mit Hilfe der Prüfgröße

$$\chi^2_{total} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \sum_{k=1}^{\ell} \frac{(n_{ijk} - n'_{ijk})^2}{n'_{ijk}} \qquad (4.2.2\text{-}1)$$

untersucht werden.

Die Testgröße χ^2, die hier über einer Kontingenztabelle vom Umfang $r \times c \times \ell$ definiert ist, ist eine Funktion der Randsummen $n_{i..}$, $n_{.j.}$ und $n_{..k}$. Diese Parameter sind wegen der Nebenbedingungen

$$\sum_{i=1}^{r} n_{i..} = \sum_{j=1}^{c} n_{.j.} = \sum_{k=1}^{\ell} n_{..k} = n \qquad (4.2.2\text{-}2)$$

nicht unabhängig voneinander. Dadurch sind statt (r+c+ℓ) Parametern der Funktion nur (r+c+ℓ-2) Parameter frei wählbar. Üblicherweise wird ν, die Zahl der Freiheitsgrade eines χ^2-Tests bestimmt durch die Anzahl der Tabellenfelder vermindert um die Zahl der frei wählbaren Parameter. Im Falle der Gültigkeit der Nullhypothese ist χ^2_{total} dann annähernd χ^2-verteilt mit

$$\nu = r \cdot c \cdot \ell - (r+c+\ell-2) = r \cdot c \cdot \ell - r - c - \ell + 2 \qquad (4.2.2\text{-}3)$$

Freiheitsgraden.

Die beobachteten Häufigkeiten n_{ijk} ergeben sich aus der Kontingenztabelle der Beobachtungswerte. Die unter Gültigkeit der Nullhypothese zu erwartenden Häufigkeiten n'_{ijk} lassen sich in Analogie zu Gleichung (4.1-7) wie folgt ermitteln : Nach dem Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung gilt bei Unabhängigkeit :

$$p'_{ijk} = p'_{i..} \cdot p'_{.j.} \cdot p'_{..k} \quad \forall_{ijk}\ ^{1)} \qquad (4.2.2\text{-}4).$$

Die Randwahrscheinlichkeiten auf der rechten Seite dieser Gleichung müssen mit Hilfe von Maximum-Likelihood-Schätzungen aus den beobachteten Stichprobenergebnissen ermittelt werden :

$$\hat{p}'_{i..} = p_{i..} = \frac{n_{i..}}{n} \qquad \forall_i \quad (4.2.2\text{-}5)$$

$$\hat{p}'_{.j.} = p_{.j.} = \frac{n_{.j.}}{n} \qquad \forall_j \quad (4.2.2\text{-}6)$$

$$\hat{p}'_{..k} = p_{..k} = \frac{n_{..k}}{n} \qquad \forall_k \quad (4.2.2\text{-}7).$$

---

1 Das Symbol $\forall_{ijk}$ bedeutet "für alle Werte von i, j und k". Analog sind andere Indices zu interpretieren.

Wegen der Beziehung

$$n'_{ijk} = p'_{ijk} \cdot n \qquad (4.2.2\text{-}8)$$

ergibt sich dann zur Berechnung der n'_{ijk} die Gleichung

$$n'_{ijk} = \frac{n_{i..}\, n_{.j.}\, n_{..k}}{n^2} \quad \forall_{ijk} \qquad (4.2.2\text{-}9)$$

Die weitere Durchführung des Testverfahrens entspricht der in Unterabschnitt 4.2.1 geschilderten Vorgehensweise.

Führt man zur Illustration den Test auf totale Unabhängigkeit für das Modellbeispiel 1[1)] durch, geht man aus von den folgenden beiden Kontingenztabellen der beobachteten und erwarteten Häufigkeiten :

Tab. 6 : Kontingenztabelle der beobachteten Häufigkeiten n_{ijk} für Modellbeispiel 1

K / J / I	K_1		K_2	
	J_1	J_2	J_1	J_2
I_1	80	90	70	80
I_2	150	130	100	300

Tab. 7 : Kontingenztabelle der unter Gültigkeit der Hypothese totaler Unabhängigkeit zu erwartenden Häufigkeiten n'_{ijk} für Modellbeispiel 1

K / J / I	K_1		K_2	
	J_1	J_2	J_1	J_2
I_1	73,6	70,4	54,4	121,6
I_2	156,4	149,6	115,6	258,4

1 Vgl. die Erläuterungen zu Modellbeispiel 1 auf S.24ff..

Nach Gleichung (4.2.2-1) ergibt sich dann für die Prüfgröße χ^2_{total} ein Wert von 78,855 bei $\nu = 4$ Freiheitsgraden. Bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$ liegt der kritische χ^2-Wert bei

$$\chi^2_{c(4;0,05)} = 9{,}49.$$

Da $\chi^2_{total} > \chi^2_c$, muß die Nullhypothese verworfen werden. Zwischen der Rechtsform, der Gewinnentwicklung und der Mitbestimmung in den Unternehmen besteht ein Zusammenhang.

4.2.3 Der Test auf multiple Unabhängigkeit zwischen drei nominalskalierten Merkmalen

Bei dieser Problemstellung wird untersucht, ob zum Beispiel ein Zusammenhang besteht zwischen dem Merkmal I auf der einen Seite und den Merkmalen J und K auf der anderen Seite. Man untersucht demzufolge den wechselseitigen Einfluß der Variablen J und K auf die Variable I und umgekehrt. Diese Fragestellung entspricht der der multiplen Korrelationsanalyse metrisch skalierter Daten. Die Prüfung auf multiplen Zusammenhang ist insofern von Bedeutung als bei Vorliegen multipler Unabhängigkeit zwischen dem Merkmal I und den Merkmalen (J,K) die zu untersuchende Kontingenztabelle um eine Dimension vermindert werden kann[1)] so daß in diesem Falle nur noch die Beziehungen zwischen den Merkmalen J und K bestimmt werden müssen.

Bei drei Merkmalen ergeben sich kombinatorisch drei Möglichkeiten der multiplen Unabhängigkeits-

1 Vgl. z.B.: VICTOR, N.: a.a.O., S. 24

analyse. Man kann nämlich untersuchen, ob

(1) I unabhängig ist von (J und K),
(2) J unabhängig ist von (I und K)
und (3) K unabhängig ist von (I und J).

Für den Unabhängigkeitstest des Falles (1) gilt dann die Prüfgröße

$$\chi^2_{I(JK)} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \sum_{k=1}^{\ell} \frac{(n_{ijk}-n'_{ijk})^2}{n'_{ijk}} \quad (4.2.3\text{-}1),$$

wobei sich die n'_{ijk} schätzen lassen durch

$$n'_{ijk} = \frac{n_{i..} \cdot n_{.jk}}{n} \quad (4.2.3\text{-}2).$$

Die Prüfgröße $\chi^2_{I(JK)}$, die über einer Kontingenztabelle vom Umfang $r \times (c \cdot \ell)$ definiert ist, ist eine Funktion der Randsummen $n_{i..}$ und $n_{.jk}$. Diese Parameter sind wegen der Nebenbedingung

$$\sum_{i=1}^{r} n_{i..} = \sum_{j=1}^{c} \sum_{k=1}^{\ell} n_{.jk} = n \quad (4.2.3\text{-}3)$$

nicht unabhängig voneinander. Dadurch sind statt $\{r+(c \cdot \ell)\}$ Parmetern der Funktion nur $\{r+(c \cdot \ell)-1\}$ Parameter frei wählbar. Üblicherweise wird ν, die Zahl der Freiheitsgrade eines χ^2-Tests bestimmt durch die Anzahl der Tabellenfelder vermindert um die Zahl der frei wählbaren Parameter. Im Falle der Gültigkeit der Nullhypothese ist $\chi^2_{I(JK)}$ annähernd χ^2-verteilt mit

$$\nu = \{r \cdot (c \cdot \ell) - r + (c \cdot \ell) - 1\} = (r-1) \cdot (c \cdot \ell - 1) \quad (4.2.3\text{-}4)$$

Freiheitsgraden.

Die Prüfgrößen $\chi^2_{J(IK)}$ und $\chi^2_{K(IJ)}$ können analog zu dem geschilderten Vorgehen ermittelt werden, ebenso die Zahl der Freiheitsgrade.

Bestimmt man für das Modellbeispiel 1[1)] die unter Gültigkeit der Nullhypothese der multiplen Unabhängigkeit zu erwartenden Häufigkeiten und stellt sie ebenfalls in Form von Kontingenztabellen dar, so ergibt sich

Tab. 8 : Kontingenztabelle der zu erwartenden Häufigkeiten n'_{ijk} für den Unabhängigkeitstest $I(JK)_{ijk}$ für Modellbeispiel 1

K / J / I	K_1		K_2	
	J_1	J_2	J_1	J_2
I_1	73,6	70,4	54,4	121,6
I_2	156,4	149,6	115,6	258,4

Tab. 9 : Kontingenztafel der zu erwartenden Häufigkeiten n'_{ijk} für den Unabhängigkeitstest $J(IK)_{ijk}$ für Modellbeispiel 1

K / J / I	K_1		K_2	
	J_1	J_2	J_1	J_2
I_1	68,0	102,0	60,0	90,0
I_2	112,0	168,0	160,0	240,0

Tab. 10 : Kontingenztabelle der zu erwartenden Häufigkeiten n'_{ijk} für den Unabhängigkeitstest $K(IJ)_{ijk}$ für Modellbeispiel 1

K / J / I	K_1		K_2	
	J_1	J_2	J_1	J_2
I_1	67,5	76,5	82,5	93,5
I_2	112,5	193,5	137,5	236,5

1 Vgl. die Erläuterungen zu Modellbeispiel 1 auf S. 24 ff. .

Berechnet man die verschiedenen Prüfgrößen der einzelnen multiplen Unabhängigkeitstests, so ergibt sich :

$$\chi^2_{I(JK)} = 36{,}351 \text{ bei } \nu = 3 \text{ Freiheitsgraden,}$$

$$\chi^2_{J(IK)} = 65{,}295 \text{ bei } \nu = 3 \text{ Freiheitsgraden}$$

und $$\chi^2_{K(IJ)} = 69{,}156 \text{ bei } \nu = 3 \text{ Freiheitsgraden.}$$

Bei $\nu = 3$ Freiheitsgraden ergibt sich für ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$ ein kritischer Wert von

$$\chi^2_{c(3;0,05)} = 7{,}82 \ .$$

Da alle beobachteten Prüfgrößen größer sind als der kritische χ^2-Wert gilt, daß jedes Merkmal von den jeweiligen beiden anderen abhängig ist. Es bestehen multiple Zusammenhänge in allen denkbaren Formen.

4.2.4 Der Test auf partielle Unabhängigkeit zwischen drei nominalskalierten Merkmalen

Gegenstand eines Tests auf partielle Unabhängigkeit zwischen drei Merkmalen ist die Prüfung der Frage, ob zum Beispiel zwischen dem Merkmal I und dem Merkmal J Unabhängigkeit besteht bei einer bestimmten Ausprägung des Merkmals K. Kennzeichnet man diesen Tatbestand so, daß die vorgegebene Merkmalsausprägung hinter einen Schrägstrich "/" gestellt wird, geht es hier um die Ermittlung der Prüfgrößen

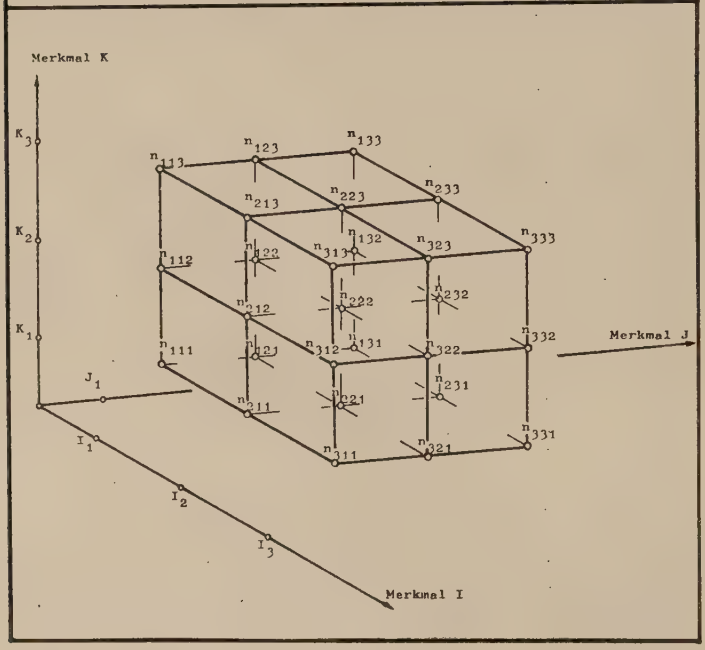
$$\chi^2_{IJ/K_k} \qquad (k=1,2,3,\ldots,\ell),$$

$$\chi^2_{IK/J_j} \qquad (j=1,2,3,\ldots,c)$$

und $$\chi^2_{JK/I_i} \qquad (i=1,2,3,\ldots,r).$$

Die partielle Betrachtungsweise kann man sich graphisch anhand eines 3 × 3 × 3 -Kontingenzwürfels wie in Abb. 9 veranschaulichen.

Abb. 9 : Allgemeiner Kontingenzwürfel mit jeweils drei Merkmalsausprägungen



Bei der Untersuchung der partiellen Unabhängigkeit wird die Unabhängigkeit in einer Ebene des Kontingenzwürfels überprüft. Daraus ergibt sich, daß man allgemein bei drei Merkmalen r + c + ℓ verschiedene partielle Zusammenhänge analysieren kann.

Ausgangspunkt einer partiellen Unabhängigkeitsanalyse sind beispielsweise die Hypothesen

H_o : Zwischen den Merkmalen I und J herrscht Unabhängigkeit bei der Ausprägung K_k des Merkmals K

und H_1 : Zwischen den Merkmalen I und J herrscht Abhängigkeit bei der Ausprägung K_k des Merkmals K.

Zur Prüfung der Hypothesen verwendet man die Prüfgröße

$$\chi^2_{IJ/K_k} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(n_{ijk} - n'_{ijk})^2}{n'_{ijk}} \qquad (4.2.4\text{-}1)\ ,$$

wobei die unter Gültigkeit der Nullhypothese zu erwartenden Häufigkeiten geschätzt werden nach

$$n'_{ijk} = \frac{n_{i.k} \cdot n_{.jk}}{n_{..k}} \qquad (4.2.4\text{-}2).$$

Die Prüfgröße χ^2_{IJ/K_k}, die für alle Werte von k über einer Kontingenztabelle vom Umfang r × c definiert ist, ist eine Funktion der Randsummen $n_{i.k}$ und $n_{.jk}$. Diese Parameter sind wegen der Nebenbedingung

$$\sum_{i=1}^{r} n_{i.k} = \sum_{j=1}^{c} n_{.jk} = n_{..k} \qquad (4.2.4\text{-}3)$$

bei vorgegebenem k nicht unabhängig voneinander. Dadurch sind statt (r+c) Parametern der Funktion nur (r+c-1) Parameter frei wählbar. Üblicherweise wird ν, die Zahl der Freiheitsgrade eines χ^2-Tests, bestimmt durch die Anzahl der Tabellenfelder vermindert um die Zahl der frei wählbaren Parameter.

Im Falle der partiellen Unabhängigkeit zwischen I und J bei vorgegebenem K_k ist die Prüfgröße χ^2_{IJ/K_k} annähernd χ^2-verteilt mit

$$\nu = r \cdot c - (r+c-1) = (r-1) \cdot (c-1) \quad (4.2.4\text{-}4)$$

Freiheitsgraden.

Die Analyse der partiellen Unabhängigkeit soll nun anhand von Modellbeispiel 1[1)] demonstriert werden. Wenn zum Beispiel die Ausprägung K_1 vorgegeben wird, ergibt sich für diese Ebene des Kontingenzwürfels:

Tab. 11 : Kontingenztabelle der beobachteten Häufigkeiten n_{ij1} für Modellbeispiel 1

I \ J	J_1	J_2
I_1	80	90
I_2	150	130

Tab. 12 : Kontingenztabelle der erwarteten Häufigkeiten n'_{ij1} für Modellbeispiel 1

I \ J	J_1	J_2
I_1	86,9	83,1
I_2	143,1	136,9

Berechnet man mit diesen Werten die Prüfgröße, so ergibt sich

$$\chi^2_{IJ/K_1} = 1{,}544$$

unter Berücksichtigung der YATES-Korrektur. Da

$$(\chi^2_{IJ/K_1} = 1{,}544) < (\chi^2_{c(1;0,05)} = 3{,}84),$$

1 Vgl. die Erläuterungen zu Modellbeispiel 1 auf S. 24 ff. .

muß die Nullhypothese der Unabhängigkeit zwischen Rechtsform und Gewinnentwicklung dann beibehalten werden, wenn die Mitbestimmung nicht praktiziert wird.

Berechnet man für Modellbeispielldie weiteren partiellen Prüfgrößen der Unabhängigkeitstests, kommt man zu den folgenden Resultaten :

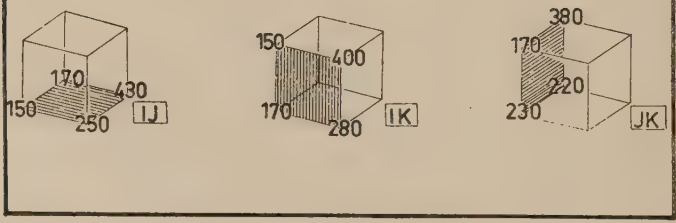
Fall		
(2)	$\chi^2_{IJ/K_2} = 22{,}977$	bei jeweils 1 Freiheitsgrad
(3)	$\chi^2_{IK/J_1} = 1{,}443$	
(4)	$\chi^2_{IK/J_2} = 26{,}086$	
(5)	$\chi^2_{JK/I_1} = 0{,}002$	
(6)	$\chi^2_{JK/I_2} = 56{,}611$	

Die Signifikanzprüfung dieser Ergebnisse führt zu dem Schluß, daß sich bei den Unternehmen mit konstanter oder fallender Gewinnentwicklung , Fall (3), die Rechtsform und die Mitbestimmung nicht beeinflussen und daß bei den Personengesellschaften, Fall (5), sich Gewinnentwicklung und Mitbestimmung nicht beeinflussen. In allen anderen untersuchten Fällen besteht ein Zusammenhang zwischen den jeweiligen Merkmalen, wobei diese Aussage auf einem Signifikanzniveau von jeweils $\alpha = 0{,}05$ gemacht werden kann.

4.2.5 Der Test auf unbedingte Zweifachunabhängigkeit zwischen drei nominalskalierten Merkmalen

Auch bei drei beobachteten Merkmalen kann es mitunter von Interesse sein, die Unabhängigkeit zwischen zweien dieser drei Merkmale zu überprüfen. Es lassen sich dabei drei verschiedene Tests auf unbedingte Zweifachunabhängigkeit durchführen. Veranschaulicht man sich diese Problemstellung graphisch anhand eines Kontingenzwürfels, so bedeutet die Analyse der unbedingten Zweifachunabhängigkeit die Auswertung der additiven Zusammenfassung aller parallelen Ebenen des Kontingenzwürfels, wie in Abb.10 für das Modellbeispiel 1[1)] dargestellt.

Abb.10 : Die auszuwertenden Kontingenzwürfel für den Test auf unbedingte Zweifachunabhängigkeit für Modellbeispiel 1



Untersucht man beispielsweise, ob zwischen den Merkmalen I und J ein Zusammenhang besteht, ermittelt man nach Formulierung der Hypothesen

H_o : Zwischen I und J besteht Unabhängigkeit

und H_1 : Zwischen I und J besteht Abhängigkeit

1 Vgl. die Erläuterungen zu Modellbeispiel 1 auf S. 24 ff. .

die Prüfgröße

$$\chi^2_{IJ} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(n_{ij.} - n'_{ij.})^2}{n'_{ij.}} \qquad (4.2.5\text{-}1),$$

wobei

$$n'_{ij.} = \frac{n_{i..} \cdot n_{.j.}}{n} \qquad (4.2.5\text{-}2).$$

Die Prüfgröße χ^2_{IJ}, die über einer Kontingenztabelle vom Umfang r × c definiert ist, ist eine Funktion der Randsummen $n_{i..}$ und $n_{.j.}$. Diese Parameter sind wegen der Nebenbedingung

$$\sum_{i=1}^{r} n_{i..} = \sum_{j=1}^{c} n_{.j.} = n \qquad (4.2.5\text{-}3)$$

nicht unabhängig voneinander. Dadurch sind statt (r+c) Parametern der Funktion nur (r+c-1) Parameter frei wählbar. Üblicherweise wird ν, die Zahl der Freiheitsgrade eines χ^2-Tests bestimmt durch die Anzahl der Tabellenfelder vermindert um die Zahl der frei wählbaren Parameter. Im Falle der Gültigkeit der Nullhypothese ist χ^2_{IJ} annähernd χ^2-verteilt mit

$$\nu = r \cdot c - (r+c-1) = (r-1) \cdot (c-1) \qquad (4.2.5\text{-}4)$$

Freiheitsgraden.

Überprüft man die Unabhängigkeit zwischen I und J in Beispiel 1[1)], so lassen sich die in den Tabellen 13 und 14 wiedergegebenen Kontingenztabellen der beobachteten und erwarteten Häufigkeiten angben.

---

1 Vgl. die Erläuterungen zu Modellbeispiel 1 auf S. 24 f. .

Tab. 13 : Kontingenztabelle der beobachteten Häufigkeiten $n_{ij.}$ für Modellbeispiel 1

I \ J	J_1	J_2
I_1	150	170
I_2	250	430

Tab. 14 : Kontingenztabelle der unter Gültigkeit der Nullhypothese zu erwartenden Häufigkeiten $n'_{ij.}$ für Modellbeispiel 1

I \ J	J_1	J_2
I_1	128	192
I_2	272	408

Mit diesen Häufigkeiten läßt sich gemäß Gleichung (4.2.5-1) berechnen :

$$\chi^2_{IJ} = 8{,}851 \ .$$

Da $(\chi^2_{IJ} = 8{,}851) > (\chi^2_{c(1;0{,}05)} = 3{,}84)$, muß die Hypothese von der Unabhängigkeit zwischen diesen beiden Merkmalen verworfen werden. Bei einem Fehlerrisiko von $\alpha = 0{,}05$ besteht Abhängigkeit zwischen der Rechtsform der Unternehmen und der Gewinnentwicklung.

Analog erhält man

$$\left.\begin{aligned} \chi^2_{IK} &= 12{,}074 \\ \chi^2_{JK} &= 41{,}250 \end{aligned}\right\} \text{bei jeweils } \nu = 1 \text{ Freiheitsgrad.}$$

Aus der Signifikanzprüfung ergibt sich auch in diesen beiden Fällen Abhängigkeit zwischen den jeweiligen Merkmalen

Zur Prüfung der Unabhängigkeit zwischen mehreren nominalskalierten Merkmalen wurden neben dem χ^2-Test in den letzten Jahren weitere Testverfahren entwickelt, die auf den Grundgedanken der Informationstheorie beruhen. Diese sollen im nachfolgenden Abschnitt 4.3 erläutert werden.

4.3 Die Prüfung der einfachen Unabhängigkeit zwischen drei nominalskalierten Merkmalen mit Hilfe des informationstheoretischen Verfahrens

4.3.1 Das Modell der Informationstheorie

Die Informationstheorie ist ein Zweig der mathematischen Theorie der Wahrscheinlichkeit und der mathematischen Statistik[1]. Sie untersucht die mathematisch-statistischen Probleme, "...die bei der Aufbewahrung, Umformung und Übermittlung von Informationen auftreten."[2] Sie entwickelte sich zunächst im Rahmen der angewandten Physik[3] und

1 Vgl. z.B.: KULLBACK, S.: Information theory ..., a.a.O., S. 1 .

2 Siehe : RENYI, A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung, mit einem Anhang über Informationstheorie, 3.Aufl., Berlin 1971, S. 435 .

3 Vgl. hier z.B.: BOLTZMANN, L.: Vorlesungen über Gastheorie, I. Theil, Leipzig 1895

der Nachrichtentechnik[1] und hat in den letzten Jahrzehnten[2] auch zunehmende Bedeutung im Rahmen allgemeiner statistischer Forschungen[3] gewonnen.

Es soll nun erläutert werden, in welcher Form die Informationstheorie zur Bestimmung und Beurteilung von Zusammenhängen zwischen nominalskalierten Merkmalen herangezogen werden kann. Hierzu müssen jedoch zunächst die Begriffe U n s i c h e r h e i t, E n t r o p i e und I n f o r m a t i o n näher untersucht werden.

Kennzeichen der Durchführung eines Zufallsexpermentes ist, daß U n s i c h e r h e i t über den Ausgang des Experimentes besteht. Dabei ist die Unsicherheit über den Ausgang verschiedener Zufallsexperimente unterschiedlich, je nach der Zahl der möglichen Resultate und deren Eintrittswahrscheinlichkeiten. Der Grad der Unsicherheit kann durch eine Maßzahl angegeben werden, die im folgenden abzuleiten ist.

Betrachtet man zunächst ein Zufallsexperiment mit m möglichen Realisationen, die alle gleichwahrscheinlich sind, so ist der Grad der Unsicherheit

---

1 Vgl. z.B.: HARTLEY, R. V.: Transmission of information, The Bell Systems technical Journal 7 (1928),S. 535 ff. ; SHANNON, C. E.: A mathematical theory of communication, The Bell Systems technical Journal 27 (1948), S. 279 ff. und 623 ff., wiedergegeben in : SHANNON, C. E. und WEAVER, W.: The mathematical theory of communication, 3.Aufl., Urbana 1963, S. 1 ff. .

2 Über die geschichtliche Entwicklung der Informationstheorie und der Theorie der Entropie vgl. z.B.: KENDALL, M.G.: Entropy, probability and information, International statistical Review 41 (1973), S. 59 ff. .

3 Vgl. z.B.: FISHER, R. A.: Theory of statistical estimation, Proceedings of the Cambridge philosophical Society 22 (1925),S.700ff.;Derselbe: The logic of inductive inference,JRSS(A) 98 (1935), S. 42 ff. .

eindeutig charakterisiert durch die Zahl der möglichen Realisationen. Denn bei einem Experiment mit zwei Realisationen ist der Grad der Unsicherheit über den Ausgang des Experimentes natürlich geringer, als bei einem Experiment mit zehn Realisationen. Mit anderen Worten ist U, die Maßzahl der Unsicherheit eine Funktion von m :

$$U = f(m) \qquad (4.3.1\text{-}1).$$

Diese Maßzahl muß noch einer weiteren Bedingung genügen. Untersucht man zwei voneinander unabhängige Zufallsexperimente E_1 und E_2 mit m beziehungsweise n gleichwahrscheinlichen Ausprägungen, so kann auch ein Zufallsexperiment E_3 durchgeführt werden, das in der gleichzeitigen gemeinsamen Verwirklichung von E_1 und E_2 besteht. In diesem Fall ist die Unsicherheit über den Ausgang von E_3, nämlich $U_3 = f(m \cdot n)$, größer als U_1 oder U_2. Üblicherweise wird die Unsicherheit der gemeinsamen Ereignisses als Summe der Unsicherheit der Einzelereignisse, also

$$U_3 = U_1 + U_2 \qquad (4.3.1\text{-}2)$$

beziehungsweise

$$f(m \cdot n) = f(m) + f(n) \qquad (4.3.1\text{-}3)$$

definiert[1)].

Bezeichnet man den Grad der Unsicherheit eines Zufallsexperiments mit m gleichwahrscheinlichen Realisationen als U, so kann man leicht zeigen[2)], daß

1 Vgl. z.B.: RENYI, A.: a.a.O., S. 437 f. .

2 Vgl. z.B.: JAGLOM, A. M. und JAGLOM, I. M.: Wahrscheinlichkeit und Information, 3. Aufl., Berlin 1967, S. 113 f. .

die Bedingungen (4.3.1-1) und (4.3.1-3) nur durch eine logarithmische Funktion

$$U = \log(m) \qquad (4.3.1\text{-}4)$$

erfüllt werden. Diese Funktion wird null bei m=1 möglichen Ergebnissen des Zufallsexperimentes, das heißt, es besteht keine Unsicherheit. Die Funktion nimmt den Wert ∞ an, wenn $m \to \infty$. Die Wahl der Basis des Logarithmensystems spielt für die Richtigkeit der Beziehung (4.3.1-4) keine Rolle. Aus Gründen, die später zu erläutern sind, soll fortan die Maßgröße für den Grad der Unsicherheit mit natürlichen Logarithmen definiert werden, also

$$U = \ln(m) \qquad (4.3.1\text{-}4a).$$

Bei Gleichwahrscheinlichkeit haben die einzelnen Ergebnisse R_i, (i=1,2,3,...,m), eines Zufallsexperimentes E die Wahrscheinlichkeit

$$w_i = \frac{1}{m} \qquad (4.3.1\text{-}5).$$

Allgemein läßt sich der Ausgang eines derartigen Zufallsexperimentes gut durch ein "Wahrscheinlichkeitsschema"

$$E = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 & \cdot\cdot & R_i & \cdot\cdot & R_m \\ w_1 & w_2 & & w_i & & w_m \end{pmatrix}$$

charakterisieren, in dem jedem möglichen Ergebnis des Experimentes seine Eintrittswahrscheinlichkeit zugeordnet ist.

Da die Maßgröße der Unsicherheit des gesamten Ex-

perimentes E den Wert ln(m) hat, kann man wegen der Gleichwahrscheinlichkeit der Ergebnisse sagen, daß jede Realisation des Experimentes die Unsicherheit

$$U_{R_i} = \frac{1}{m} \cdot \ln(m) \qquad (4.3.1\text{-}6)$$

beziehungsweise

$$U_{R_i} = w_i \cdot \ln(\frac{1}{w_i}) \qquad (4.3.1\text{-}7)$$

aufweist.

Sind die Realisationen ρ_i, (i=1,2,3,...,m) eines Zufallsexperimentes ε nicht gleichwahrscheinlich, gilt also das Wahrscheinlichkeitsschema

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 & .. & \rho_i & .. & \rho_m \\ w_1 & w_2 & .. & w_i & .. & w_m \end{pmatrix}, \quad w_i \neq \frac{1}{m}, (i=1,2,3,...,m)$$

so läßt sich in Umkehrung des letzten Gedankengangs die Unsicherheit des Experimentes ε angeben als

$$U_\varepsilon = \{w_1 \cdot \ln(\frac{1}{w_1})\} + \{w_2 \cdot \ln(\frac{1}{w_2})\} + \ ... \ + \{w_m \cdot \ln(\frac{1}{w_m})\}$$

oder

$$U_\varepsilon = \sum_{i=1}^{m} w_i \cdot \ln(\frac{1}{w_i}) \qquad (4.3.1\text{-}8).$$

Diese allgemeine Maßgröße der Unsicherheit eines Zufallsexperimentes bezeichnet man in Anlehnung an entsprechende Probleme der Thermodynamik als E n t r o p i e eines Experimentes. Sie wird nach dem amerikanischen Wissenschaftler SHANNON, der zuerst mit diesem Ausdruck in der Nachrichten-

technik gearbeitet hat[1] auch als SHANNON'sche Formel und mit dem Symbol $H(\varepsilon)$ bezeichnet.

Die Entropie gemäß der SHANNON'schen Formel nimmt den Wert null an, wenn eine der Realisationen des Experimentes eine Eintrittswahrscheinlichkeit von eins hat, während alle anderen eine solche von null aufweisen. Der Wert der Entropie wird bei vorgegebener Anzahl der möglichen Realisationen dann ein Maximum, wenn alle Realisationen gleichwahrscheinlich sind.

Bei gemeinsamer Realisation zweier Zufallsexperimente kann neben der Entropie der Einzelexperimente auch eine b e d i n g t e E n t r o p i e festgestellt werden. Dies geschieht in Anlehnung an die Wahrscheinlichkeitsrechnung, indem man untersucht, wie groß die Entropie des einen Versuchs unter der Bedingung ist, daß das Ergebnis des anderen Versuchs bereits bekannt ist. Dieser Tatbestand läßt sich wie folgt ausdrücken : Gegeben seien zwei Zufallsexperimente D und E mit den möglichen Ergebnissen R_i, $(i=1,2,3,\ldots,m)$ beziehungsweise S_j, $(j=1,2,3,\ldots,n)$. Die möglichen gemeinsamen Ergebnisse lassen sich in der Matrix

$$\begin{bmatrix} (R_1 \cap S_1) & (R_1 \cap S_2) & \ldots & (R_1 \cap S_n) \\ (R_2 \cap S_1) & (R_2 \cap S_2) & \ldots & (R_2 \cap S_n) \\ \vdots & & (R_1 \cap S_j) & \vdots \\ (R_m \cap S_1) & (R_m \cap S_2) & & (R_m \cap S_n) \end{bmatrix}$$

angeben.

---

1 Die SHANNON'sche Formel entstand in Weiterentwicklung einer Unsicherheitsmaßgröße von HARTLEY durch Beseitigung einiger Unzulänglichkeiten der letzteren. Vgl. SHANNON, C. E.: a.a.O., wiedergegeben in SHANNON, C. E. und WEAVER, W.: a.a.O., S. 19 .

Nach dem allgemeinen Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung gilt :

$$w_{ij} = w_i \cdot w_{j/i} \qquad (4.3.1\text{-}9).$$

Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß dieser multiplikativen Verknüpfung der Wahrscheinlichkeiten durch die Logarithmierung eine additive Verknüpfung der Entropien entspricht, erhält man analog

$$H(D \cap E) = H(D) + H(E/D) \quad (4.3.1\text{-}10).$$

Den zweiten Summanden auf der rechten Seite von (4.3.1-10) bezeichnet man als bedingte Entropie des Versuchs E unter der Bedingung, daß das Ergebnis des Versuches D festliegt. Da man den zusammengesetzten Versuch (D∩E) auch als (E∩D) durchführen kann, ohne daß es zu anderen Ergebnissen kommt, muß gelten :

$$H(E \cap D) = H(D \cap E) = H(E) + H(D/E) \qquad (4.3.1\text{-}11).$$

Es ist offensichtlich, daß im Falle der Unabhängigkeit zwischen D und E die bedingte Entropie H(D/E) in H(D) beziehungsweise H(E/D) in H(E) übergeht. Mit diesen bisher definierten Begriffen läßt sich nun der Inhalt des Begriffes I n f o r m a t i o n darstellen.

Gegeben seien wieder zwei Zufallsexperimente D und E mit den Ausprägungen R_i, (i=1,2,3,...,m) beziehungsweise S_j, (j=1,2,3,...,n). Diese Experimente können einzeln oder gemeinsam realisiert werden. Die Entropien und bedingten Entropien der Versuche seien bekannt.

Man kann nun überprüfen, ob die Realisation des Experimentes D die Unsicherheit über den Ausgang des Experimentes E beeinflußt. Hierzu bildet man die Differenz

$$I(D,E) = H(E) - H(E/D) \qquad (4.3.1\text{-}12),$$

die angibt, inwieweit die Realisierung des Experimentes D die Unsicherheit über den Ausgang des Versuches E vermindert. Diese Differenz bezeichnet man als die Menge an Information oder einfacher als die Information über den Versuch E, die bereits im Experiment D enthalten ist[1]. In Analogie zu Gleichung (4.3.1-11) gilt aber auch :

$$I(E,D) = I(D,E) = I(D \cap E) \qquad (4.3.1\text{-}13).$$

$I(D \cap E)$ bezeichnet man auch als wechselseitige oder gemeinsame Information der Experimente D und E[2].

Die zwischen mehreren Zufallsexperimenten vorhandene gemeinsame Information läßt sich gut zur Bestimmung von Zusammenhängen zwischen statistischen Merkmalen heranziehen, wenn man die Auswahl der statistischen Daten als Zufallsexperiment betreibt. Besteht zwischen den Ereignissen D und E Unabhängigkeit, geht die bedingte Entropie H(E/D) in Gleichung (4.3.1-12) in die einfache Entropie H(E) über. Die in Versuch D enthaltene Information über den Ausgang des Experimentes E ist gleich null und vice versa für H(D/E). Besteht aber Abhängigkeit zwischen den Experimenten, wird $I(D \cap E)$ einen positiven Wert annehmen. Bestimmt der Ausgang des Versuches D das Ergebnis des Versuches E eindeutig,

1 Vgl. hierzu : JAGLOM, A. M. und JAGLOM, I. M.: a.a.O., S. 85 f. .

2 Vgl.: JAGLOM, A. M. und JAGLOM, I. M.: a.a.O., S. 99 f. .

nimmt $I(D \cap E) = H(E)$ den maximalen Wert an.

Da in der vorliegenden Arbeit die Beziehungen zwischen nominalskalierten Merkmalen untersucht werden, die nur als wechselseitige Beziehungen erkennbar sind, wird fortan der Informationsbegriff nur in dem Sinne als gemeinsame Information verwandt. Die Aussagen über die Verbindung zwischen dem Grad der Abhängigkeit und der nachweisbaren Information bleiben davon unberührt.

Zur Bestimmung des Grades der Abhängigkeit zwischen zwei Merkmalen kann die zwischen den Merkmalen vorhandene Information als Kriterium herangezogen werden. Deren Ausmaß bestimmt sich wie folgt : Unter Verwendung der Gleichungen (4.3.1-10) und (4.3.1-13) erhält man

$$I(D \cap E) = H(D) + H(E) - H(D \cap E) \quad (4.3.1\text{-}14).$$

Setzt man die oben in Gleichung (4.3.1-8) definierten Ausdrücke für die Entropien ein, so ergibt sich :

$$I(D \cap E) = \sum_{i=1}^{m} w_i \cdot \ln\left(\frac{1}{w_i}\right) + \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot \ln\left(\frac{1}{w_j}\right) - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} w_i \cdot w_{j/i} \cdot \ln\left[\frac{w_i \cdot w_{j/i}}{w_i \cdot w_j}\right] \quad (4.3.1\text{-}15).$$

Diese Gleichung läßt sich mit $w_{ij} = w_i \cdot w_{j/i}$ umformen zu

$$I(D \cap E) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \cdot \ln\left[\frac{w_{ij}}{w_i \cdot w_j}\right] \quad (4.3.1\text{-}16).$$

Dieser Ausdruck kann als Bestimmungsgleichung der zwischen den Merkmalen vorhandenen gemeinsamen In-

formation verwandt werden[1].

Faßt man die Ergebnisse der beiden zu beurteilenden Zufallsexperimente in der Weise auf, daß das eine eine beobachtete Wahrscheinlichkeitsverteilung p(x), das andere eine Wahrscheinlichkeitsverteilung q(x) unter Gültigkeit einer Nullhypothese bildet, wobei beide Verteilungen über der gleichen Grundgesamtheit definiert sind, so erhält man in Abwandlung von Gleichung (4.3.1-16) die zuerst von KULLBACK definierte Größe[2]

$$I(p:q) = \sum p(x) \cdot \ln\left[\frac{p(x)}{q(x)}\right] \qquad (4.3.1\text{-}17).$$

KULLBACK interpretiert die gemeinsame Information zwischen p(x) und q(x) als die Information, die die U n t e r s c h e i d b a r k e i t (discrimination) zwischen den Verteilungen hervorruft. Sind beide Verteilungen identisch, wird I(p:q) = 0. Dieser Gedanke bildet die Basis des informationstheoretischen Unabhängigkeitstests, bei dem p(x) als beobachtete Wahrscheinlichkeitsverteilung der Merkmalsausprägungen und q(x) als deren Wahrscheinlichkeitsverteilung unter Gültigkeit der Nullhypothese der Unabhängigkeit aufgefaßt wird.

KULLBACK weist nach[3], daß die Unterscheidbarkeit zwischen den Wahrscheinlichkeitsverteilungen p(x) und q(x) dann minimal wird, wenn die beiden Verteilungen zu einer Klasse von Transformationsfunk-

---

1 BIHN bezeichnet diese gemeinsame Information als "Transinformationsgehalt", RÉNYI als "relative Information", SENDERS als "information transmitted". Siehe : BIHN, W.: Die informationstheoretische Messung von Strukturs ystemen des internationalen Handels, Freiburg(Breisgau) 1967, S. 73; RÉNYI,A.: a.a.O., S. 450; SENDERS, V. L.: a.a.O., S. 97 .

2 Vgl. hierzu : KULLBACK, S. und LEIBLER, R. A.: On information and sufficiency,AMS 22(1951),S.80 f..

3 Vgl.:KULLBACK, S.: Information theory..., a.a.O., S. 36 ff. .

tionen des Exponentialtyps gehören und somit auseinander gewonnen werden können. Diese minimale Unterscheidbarkeit ist relevant bei der Betrachtung des Signifikanzniveaus des zu konstruierenden Unabhängigkeitstests. Zu den Verteilungsfunktionen, für die die von KULLBACK angegebenen Transformationen möglich sind, gehören unter anderem die Normalverteilung, die χ^2-Verteilung und die Multinomialverteilung.

Wie bei der Diskussion des Grundmodells des Unabhängigkeitstests erläutert, ist eine Multinomialverteilung bestimmt durch c Kategorien mit den Wahrscheinlichkeiten p_j, (j=1,2,3,...,c), und dem Untersuchungsumfang n. Das heißt :

$$q(x_1,x_2,\ldots x_c) = n! \cdot \prod_{j=1}^{c} (p_j^{x_j}/x_j!) \qquad (4.3.1\text{-}18),$$

mit $p_j>0$ und $\sum_{j=1}^{c} p_j = 1$ und $\sum_{j=1}^{c} n_j = n$.

Von den angegebenen Verteilungen q(x) haben diejenigen Verteilungen p(x) die geringste Unterscheidbarkeit, die aus q(x) gewonnen werden können gemäß der Transformationsfunktion[1)]

$$p(x) = \left[e^{t_1x_1+\ldots+t_cx_c}\right] \cdot q(x) / \left[p_1e^{t_1}+\ldots+p_ce^{t_c}\right]^n \qquad (4.3.1\text{-}19).$$

---

1 Vgl.: KULLBACK, S., KUPPERMAN, M. und KU, H. H.: An application of information theory to the analysis of contingency tables, with a table of $2 \cdot n \cdot \ln(n)$, n=1(1)10000, Journal of Research of the national Bureau of Standards 66 B (1962), S. 217.

KULLBACK beweist[1], daß der Minimalwert Min I(p:q) definiert ist durch

$$\text{Min } I(p:q) = \sum_{j=1}^{c} x_j \cdot \ln\left[\frac{x_j}{n \cdot p_j}\right] \quad (4.3.1\text{-}20).$$

Dieses Minimum benennt KULLBACK "minimum discrimination information statistic" (m.d.i.s.)[2] und bezeichnet es als I. KULLBACK definiert die m.d.i.s. aus Gründen des später noch zu erläuternden Grenzübergangs zur χ^2-Verteilung mit

$$2I = 2 \sum_{j=1}^{c} x_j \cdot \ln\left[\frac{x_j}{n \cdot p_j}\right] \quad (4.3.1\text{-}21).$$

Im zweidimensionalen Fall gilt dann die Prüfgröße

$$2I = 2 \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} n_{ij} \cdot \ln\left[\frac{n_{ij}}{n \cdot \hat{p}'_{ij}}\right] \quad (4.3.1\text{-}22).$$

In dieser Gleichung stellen die n_{ij} die beobachteten Häufigkeiten dar und die $n \cdot \hat{p}'_{ij}$ sind Maximum-Likelihood-Schätzwerte für die unter Gültigkeit der Nullhypothese zu erwartenden Häufigkeiten[3]. Die Prüfgröße 2I stellt somit selbst einen Schätzwert dar, was sich künftig in der Schreibweise "$2\hat{I}$" ausdrücken wird.

Liegt eine beobachtete Häufigkeitsverteilung vor, lassen sich die $\hat{p}'_{ij}$ im Falle der Unabhängigkeit als Maximum-Likelihood-Schätzwerte aus den beob-

---

1 Vgl.: KULLBACK, S.: Information theory ..., a.a.O., S. 37 ff. .

2 Vgl.: KULLBACK, S.: Information theory ...,, a.a.O., S. 36 ff. .

3 Interessanterweise definierte WILKS schon 1935 eine analoge Log-Likelihood-Quotienten-Prüfgröße, ohne aber deren theoretischen Hintergrund völlig zu klären. Vgl.: WILKS, S. S.: The likelihood test of independence in contingency tables, AMS 6 (1935), S. 190 ff. .

achteten Häufigkeiten schätzen nach

$$\hat{p}'_{ij} = \hat{p}'_{i.} \cdot \hat{p}'_{.j} \qquad (4.3.1\text{-}23),$$

wobei

$$\hat{p}'_{i.} = \frac{n_{i.}}{n} \qquad (4.3.1\text{-}24)$$

und

$$\hat{p}'_{.j} = \frac{n_{.j}}{n} \qquad (4.3.1\text{-}25).$$

Eingesetzt in Gleichung (4.3.1-22) ergibt sich dann:

$$2\hat{I} = 2 \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} n_{ij} \cdot \ln\left[\frac{n_{ij}}{n \cdot \left[\frac{n_{i.}}{n} \cdot \frac{n_{.j}}{n}\right]}\right] \qquad (4.3.1\text{-}26)$$

und

$$2\hat{I} = 2 \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} n_{ij} \cdot \ln\left[\frac{n_{ij} \cdot n}{n_{i.} \cdot n_{.j}}\right] \qquad (4.3.1\text{-}27).$$

Für die praktische Berechnung läßt sich (4.3.1-27) umformen in

$$2\hat{I} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} 2\left[n_{ij} \cdot \ln(n_{ij}) + \ln(n) - \ln(n_{i.}) - \ln(n_{.j})\right] \qquad (4.3.1\text{-}28),$$

und aus der weiteren Umformung erhält man :

$$2\hat{I} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} 2n_{ij} \cdot \ln(n_{ij}) + 2n \cdot \ln(n) - \sum_{i=1}^{r} 2n_{i.} \cdot \ln(n_{i.}) - \sum_{j=1}^{c} 2n_{.j} \cdot \ln(n_{.j}) \qquad (4.3.1\text{-}29).$$

Die Berechnung der Prüfgröße $2\hat{I}$ in der Form (4.3.1-29) ist besonders empfehlenswert, da sich Ausdrücke der Art $2n \cdot \ln(n)$ leicht tabellieren lassen. Eine derartige Tabelle von n = 0[1)] bis n = 10000

---

1 Da $\lim_{n \to 0} (n \cdot \ln(n)) = 0$, wird $2 \cdot 0 \cdot \ln(0) = 0$ gesetzt.
Vgl.: JAGLOM, A. M. und JAGLOM, I. M.: a.a.O., S. 53 .

wurde vom Verfasser berechnet und aufgestellt. Sie ist im Anhang als Tabelle 1 wiedergegeben.

Wie KULLBACK nachweist[1], ist die Prüfgröße $2\hat{I}$ unter Gültigkeit der Nullhypothese der Unabhängigkeit zwischen den untersuchten Merkmalen annähernd χ^2-verteilt mit ν Freiheitsgraden[2]. Die Zahl der Freiheitsgrade ermittelt sich wie beim χ^2-Test. Beim Auftreten von mehr als 30 Freiheitsgraden gilt hier die gleiche standardnormalverteilte Prüfgröße (4.2.1-9) für den Signifikanztest eines ermittelten $2\hat{I}$-Wertes.

An einem Beispiel soll die Anwendung der Prüfgröße $2\hat{I}$ demonstriert werden. n = 500 zufällig ausgewählte Arbeiter seien untersucht worden nach den Merkmalen "Herkunftsregion" mit den Ausprägungen "R_1", "R_2" und "R_3" und "Berufsausbildung" mit den Ausprägungen "A_1", "A_2" und "A_3". Die Untersuchung habe das in Tabelle 15 wiedergegebene Ergebnis erbracht.

Tab. 15 : Klassifikation von 500 Arbeitern nach Herkunftsregion und Berufsausbildung

Herkunftsregion \ Berufsausbildung	A_1	A_2	A_3	$\sum$
R_1	10	70	170	250
R_2	80	50	20	150
R_3	60	30	10	100
$\sum$	150	150	200	500

1 Vgl.: KULLBACK, S.: Information theory..., a.a.O., S.97ff..

2 Diese Approximation gilt nur für die mit natürlichen Logarithmen definierte und mit dem Faktor 2 multiplizierte Prüfgröße $2\hat{I}$.

Untersucht werden soll, ob Ausbildungsstand und regionale Herkunft voneinander abhängen.

Unter Gültigkeit der Nullhypothese der Unabhängigkeit zwischen den beiden Merkmalen ist die Prüfgröße $2\hat{I}$ annähernd χ^2-verteilt mit $\nu = 4$ Freiheitsgraden. Unter Verwendung von Tabelle 1 des Anhangs erhält man die einzelnen Summanden von Gleichung (4.3.1-29):

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} 2n_{ij}\cdot\ln(n_{ij}) = 4.350,6132$$

$$2n\cdot\ln(n) = 6.214,6081$$

$$\sum_{i=1}^{3} 2n_{i.}\cdot\ln(n_{i.}) = 5.125,7081$$

$$\sum_{j=1}^{3} 2n_{.j}\cdot\ln(n_{.j}) = 5.184,9551,$$

und nach (4.3.1-29) : $2\hat{I} = 244,5581$.

Bei 4 Freiheitsgraden ergibt sich $\chi^2_{c(4;0,05)} = 9,49$. Da $2\hat{I}$ wesentlich über diesem kritischen Wert liegt, ist die Hypothese von der Unabhängigkeit zwischen den beiden Merkmalen zu verwerfen. Man muß annehmen, daß ein Zusammenhang besteht zwischen der regionalen Herkunft und der Berufsausbildung.

Zum selben Testergebnis hätte der herkömmliche χ^2-Test geführt, mit dessen Hilfe sich ein $\chi^2 = 212,611$ ergibt.

Das informationstheoretische Zusammenhangsmaß $2\hat{I}$ gilt, wie die Prüfgröße χ^2, nur dann als statistisch anwendbar, wenn der Beobachtungsumfang relativ groß[1)]

1 Vgl. die entsprechenden Ausführungen zum χ^2-Test auf S. 56 ff. und die analoge Erörterung bei KULLBACK, S.: Information theory..., a.a.O., S.105.

ist, da erst dann die Approximation der Verteilung der Prüfgröße durch eine χ^2-Verteilung befriedigend ist. Auch bei informationstheoretischen Unabhängigkeitstest geht man davon aus, daß der Untersuchungsumfang mindestens 50 Einheiten umfassen sollte.

Treten in einer Kontingenztabelle in einem Feld beobachtete Häufigkeiten nicht auf, das heißt $n_{ij}=0$, so führt dies dazu, daß der Wert der Prüfgröße $2\hat{I}$ zu hoch ausfällt. Um diesem Fehler zu begegnen schlägt KU eine Korrektur vor[1], die darin besteht, für jedes Feld mit $n_{ij}=0$ einen Betrag von "1" von der Prüfgröße $2\hat{I}$ abzuziehen.

Im Falle der Unabhängigkeitsprüfung zwischen zwei jeweils dichotomisierten Merkmalen entspricht der $2\hat{I}$-Test dem G-Test von WOOLF[2]. Da in diesem Fall der Test bei $\nu = 1$ Freiheitsgrad durchgeführt wird, muß auch hier die oben schon erwähnte YATES-Korrektur angewandt werden. Diese besteht hier darin, statt der beobachteten Werte die Größen

$$2(n_{ij}-0,5)\cdot \ln(n_{ij}-0,5) \quad \text{für } n_{ij}>n'_{ij}$$

und

$$2(n_{ij}+0,5)\cdot \ln(n_{ij}+0,5) \quad \text{für } n_{ij}<n'_{ij}$$

in der entsprechend korrigierten Tabelle 2 des Anhangs nachzuschlagen[3].

---

1 Vgl. KU, H. H.: A note on contingency tables involving zero frequencies and the $2\hat{I}$-test, Technometrics 5 (1963), S. 398 ff. . Ergeben sich durch Anwendung dieser Korrektur negative Werte der Prüfgröße $2\hat{I}$, wird das Ergebnis des Tests als $2\hat{I} = 0$ definiert.

2 Vgl.: WOOLF, B.: The log-likelihood-ratio-test (the G-test), methods and tables for tests of heterogeneity in contingency tables, Annals of human Genetics 21 (1957), S. 397 ff. .

3 Sich aufgrund der YATES-Korrektur ergebende $\ln(0 \leq n < 1)$ werden als 0 definiert.

Die verschiedenen Unabhängigkeitstests für drei nominalskalierte Merkmale mit Hilfe des informationstheoretischen Verfahrens sollen in den nachfolgenden Unterabschnitten erläutert werden.

4.3.2 Der Test auf totale Unabhängigkeit zwischen drei nominalskalierten Merkmalen

Gegeben seien drei Untersuchungsmerkmale I, J und K mit den Ausprägungen I_i, (i=1,2,3,...,r), J_j, (j=1,2,3,...,c) und K_k, (k=1,2,3,...,ℓ). Ausgangspunkt des Tests auf totale Unabhängigkeit sind, wie bei der entsprechenden χ^2-Untersuchung, die Hypothesen

H_o : Zwischen den Merkmalen I, J und K besteht Unabhängigkeit

und

H_1 : Zwischen den Merkmalen I, J und K besteht Abhängigkeit.

Diese Hypothesen lassen sich mit Hilfe des $2\hat{I}$-Prüfverfahrens untersuchen. Für die Untersuchung des totalen Zusammenhangs ist $2\hat{I}$ definiert als[1)]

$$2\hat{I}_{total} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{\ell} n_{ijk} \cdot \ln\left[\frac{n^2 \cdot n_{ijk}}{n_{i..} \cdot n_{.j.} \cdot n_{..k}}\right] \qquad (4.3.2\text{-}1),$$

wie sich aus der Erweiterung von Gleichung (4.3.1-27) um eine Variable ergibt.

Diese Prüfgröße ist unter Gültigkeit der Nullhypothese annähernd χ^2-verteilt mit $\nu = r \cdot c \cdot \ell - r - c - \ell + 2$

---

1 Vgl.: KULLBACK, S.: Information theory..., a.a.O., S. 162 .

Freiheitsgraden, wie beim entsprechenden χ^2-Test nachgewiesen.

Zur Vereinfachung des Rechenaufwandes läßt sich (4.3.2-1) umformen in

$$2\hat{I}_{total} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{\ell} 2n_{ijk}\cdot\ln(n_{ijk}) + 2(2n\cdot\ln(n)) - \sum_{i=1}^{r} 2n_{i..}\cdot\ln(n_{i..}) - \sum_{j=1}^{c} 2n_{.j.}\cdot\ln(n_{.j.}) - \sum_{k=1}^{\ell} 2n_{..k}\cdot\ln(n_{..k}) \qquad (4.3.2\text{-}2).$$

Mit Hilfe von Tabelle 1 des Anhangs läßt sich die Prüfgröße $2\hat{I}$ in der Form (4.3.2-2) leicht ermitteln.

Führt man den informationstheoretischen Test auf totale Unabhängigkeit anhand des Modellbeispiels 1[1)] durch, so ergeben sich folgende Zwischensummen :

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{\ell} 2n_{ijk}\cdot\ln(n_{ijk}) = 9.919,6567$$

$$2(2n\cdot\ln(n)) = 27.631,0212$$

$$\sum_{i=1}^{r} 2n_{i..}\cdot\ln(n_{i..}) = 12.561,7716$$

$$\sum_{j=1}^{c} 2n_{.j.}\cdot\ln(n_{.j.}) = 12.469,4872$$

$$\sum_{k=1}^{\ell} 2n_{..k}\cdot\ln(n_{..k}) = 12.439,2329$$

und man erhält nach (4.3.2-2) : $2\hat{I}_{total} = 79,5862$.

---

1 Vgl. die Erläuterungen zu Modellbeispiel 1 auf S. 24 ff. .

Die Prüfgröße $2\hat{I}_{total}$ ist annähernd χ^2-verteilt mit $\nu = 4$ Freiheitsgraden. Da

$$(\chi^2_{c(4;0,05)}=9,49)<(2\hat{I}_{total}=79,5862),$$

muß die Nullhypothese abgelehnt werden. Zwischen der Rechtsform, der Gewinnentwicklung und der Mitbestimmung besteht Abhängigkeit.

Vergleicht man dieses Ergebnis mit dem des entsprechenden χ^2-Tests in Unterabschnitt 4.2.2, wo sich ein Wert der Prüfgröße von $\chi^2_{total} = 78,855$ ergeben hatte, so zeigt sich in den Resultaten deutlich eine große Ähnlichkeit der beiden Tests.

4.3.3 Der Test auf multiple Unabhängigkeit zwischen drei nominalskalierten Merkmalen

Wie bereits in Unterabschnitt 4.2.3 erläutert wurde, soll hier untersucht werden, ob Unabhängigkeit besteht zwischen einem Merkmal auf der einen Seite und den zusammengefaßten beiden anderen Merkmalen auf der anderen Seite.

Gegeben seien drei zu untersuchende Merkmale I, J und K mit den Ausprägungen I_i, $(i=1,2,3,\ldots,r)$, J_j, $(j=1,2,3,\ldots,c)$ und K_k, $(k=1,2,3,\ldots,\ell)$. Bei drei Merkmalen lassen sich drei verschiedenen Nullhypothesen multipler Unabhängigkeit überprüfen. Die Hypothese

$H_{o\ I(JK)}$: Es besteht Unabhängigkeit zwischen I und (JK)

läßt sich untersuchen mit der Prüfgröße

$$2\hat{I}_{I(JK)} = 2 \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \sum_{k=1}^{\ell} n_{ijk} \cdot \ln\left[\frac{n \cdot n_{ijk}}{n_{i..} \cdot n_{.jk}}\right]$$

(4.3.3-1),

und analog für $2\hat{I}_{J(IK)}$ und $2\hat{I}_{K(IJ)}$. Die Prüfgröße $2\hat{I}_{I(JK)}$ ist bei Gültigkeit der Nullhypothese annähernd χ^2-verteilt mit $\nu = (r-1)\cdot(c\cdot\ell-1)$ Freiheitsgraden[1].

Zur rechentechnischen Vereinfachung kann man die Prüfgröße in Gleichung (4.3.3-1) umformen zu

$$2\hat{I}_{I(JK)} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \sum_{k=1}^{\ell} 2n_{ijk} \cdot \ln(n_{ijk}) + 2n \cdot \ln(n)$$

$$- \sum_{i=1}^{r} 2n_{i..} \cdot \ln(n_{i..}) - \sum_{j=1}^{c} \sum_{k=1}^{\ell} 2n_{.jk} \cdot \ln(n_{.jk})$$

(4.3.3-2)

und analog für $2\hat{I}_{J(IK)}$ und $2\hat{I}_{K(IJ)}$.

Überprüft man die Merkmale des Modellbeispiels 1[2] auf multiple Unabhängigkeit, so erhält man :

$$2\hat{I}_{I(JK)} = 37{,}3814$$
$$2\hat{I}_{J(IK)} = 67{,}0642$$
$$2\hat{I}_{K(IJ)} = 70{,}3865.$$

Die Prüfgrößen $2\hat{I}$ sind hier annähernd χ^2-verteilt mit jeweils $\nu = 3$ Freiheitsgraden. Da $\chi^2_{c(3;0,05)} = 7{,}82$ immer kleiner ist, als die beobachteten multiplen $2\hat{I}$-Prüfgrößen, muß in allen drei Fällen auf multiple Abhängigkeit geschlossen

---

1 Vgl. die Begründung für die Zahl der Freiheitsgrade auf S. 63 dieser Arbeit.

2 Vgl. die Erläuterungen zu Modellbeispiel 1 auf S. 24 ff. .

werden.

Auch hier zeigt ein Vergleich mit den entsprechenden Werten

$$\chi^2_{I(JK)} = 36{,}351$$
$$\chi^2_{J(IK)} = 65{,}295$$
$$\chi^2_{K(IJ)} = 69{,}156,$$

daß die Ergebnisse des $2\hat{I}$-Testverfahrens denen des χ^2-Verfahrens sehr ähnlich sind.

4.3.4 Der Test auf partielle Unabhängigkeit zwischen drei nominalskalierten Merkmalen

Es kann von Interesse sein, zu prüfen, ob ein Zusammenhang besteht zwischen zwei Merkmalen bei vorgegebener Ausprägung des dritten Merkmals. Diese Fragestellung wurde bereits in Unterabschnitt 4.2.4 erläutert.

Gegeben seien die zu untersuchenden Merkmale I, J und K mit den Ausprägungen I_i, $(i=1,2,3,\ldots,r)$, J_j, $(j=1,2,3,\ldots,c)$ und K_k, $(k=1,2,3,\ldots,\ell)$.

Ausgangspunkt des Tests sind die verschiedenen oben angesprochenen Nullhypothesen, zum Beispiel

$H_{o\ IJ/K_1}$: Es besteht Unabhängigkeit zwischen I und J bei K_1

$\vdots$

$H_{o\ IJ/K_\ell}$: Es besteht Unabhängigkeit zwischen I und J bei K_ℓ

Entsprechende Nullhypothesen lassen sich für die

partiellen Unabhängigkeitstests zwischen den anderen Merkmalen formulieren. Zur Prüfung der angeführten Nullhypothesen bedient man sich der Prüfgrößen

$$2\hat{I}_{IJ/K_1} = 2 \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} n_{ij1} \cdot \ln\left[\frac{n_{..1} \cdot n_{ij1}}{n_{i.1} \cdot n_{.j1}}\right] \qquad (4.3.4\text{-}1)$$

$$\vdots$$

$$2\hat{I}_{IJ/K_\ell} = 2 \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} n_{ij\ell} \cdot \ln\left[\frac{n_{..\ell} \cdot n_{ij\ell}}{n_{i.\ell} \cdot n_{.j\ell}}\right]$$

und analog für $2\hat{I}_{IK/J_j}$ und $2\hat{I}_{JK/I_i}$.

Die Prüfgröße $2\hat{I}_{IJ/K_k}$ ist bei Gültigkeit der Nullhypothese annähernd χ^2-verteilt mit $\nu = (r-1)\cdot(c-1)$ Freiheitsgraden[1], die Zahl der Freiheitsgrade der anderen partiellen Prüfgrößen läßt sich analog ermitteln.

Auch hier sei eine der möglichen Umformungen zur rechentechnischen Vereinfachung exemplarisch angegeben :

$$2\hat{I}_{IJ/K_k} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} 2n_{ijk} \cdot \ln(n_{ijk}) + 2n_{..k} \cdot \ln(n_{..k})$$

$$- \sum_{i=1}^{r} 2n_{i.k} \ln(n_{i.k}) - \sum_{j=1}^{c} 2n_{.jk} \ln(n_{.jk})$$

(4.3.4-2),

wobei $k=1,2,3,\ldots,\ell$ vorgegeben wird.

Ermittelt man die partiellen informationstheoretischen Prüfgrößen für Modellbeispiel 1[2], so muß man die YATES-Korrektur berücksichtigen, da alle

---

1 Vgl. zur Zahl der Freiheitsgrade die entsprechenden Ausführungen auf S. 67 f. dieser Arbeit.

2 Vgl. die Erläuterungen zu Modellbeispiel 1 auf S. 24 ff. .

Prüfgrößen mit $\nu = 1$ Freiheitsgrad annähernd χ^2-verteilt sind. Man erhält :

$$2\hat{I}_{IJ/K_1} = 1{,}5447 \qquad 2\hat{I}_{IJ/K_2} = 22{,}1083$$

$$2\hat{I}_{IK/J_1} = 1{,}4398 \qquad 2\hat{I}_{IK/J_2} = 25{,}5356$$

$$2\hat{I}_{JK/I_1} = 0{,}0018 \qquad 2\hat{I}_{JK/I_2} = 56{,}6249$$

Die jeweiligen Signifikanztests führen zu den gleichen Ergebnissen, wie die entsprechenden χ^2-Tests[1].

4.3.5 Der Test auf unbedingte Zweifachunabhängigkeit zwischen drei nominalskalierten Merkmalen

Wie in Unterabschnitt 4.2.5 dargestellt wurde, lassen sich bei drei zu untersuchenden Merkmalen I, J und K drei verschiedene Tests auf unbedingte Zweifachunabhängigkeit durchführen.

Man untersucht hier die Hypothesen

$H_{o\ IJ}$: Es besteht Unabhängigkeit zwischen I und J

$H_{o\ IK}$: Es besteht Unabhängigkeit zwischen I und K

$H_{o\ JK}$: Es besteht Unabhängigkeit zwischen J und K.

Die Hypothese $H_{o\ IJ}$ läßt sich beispielsweise auf Unabhängigkeit prüfen mit

$$2\hat{I}_{IJ} = 2 \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} n_{ij.} \ln\left[\frac{n \cdot n_{ij.}}{n_{i..} \cdot n_{.j.}}\right] \quad (4.3.5\text{-}1).$$

Diese Prüfgröße ist bei Gültigkeit der Nullhypothese

1 Vgl. oben S. 68 f. .

annähernd χ^2-verteilt mit $\nu = (r-1)\cdot(c-1)$ Freiheitsgraden[1].

Auch hier läßt sich durch Auflösung der Gleichung (4.3.5-1) eine rechentechnische Vereinfachung erreichen :

$$2\hat{I}_{IJ} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} 2n_{ij.}\cdot\ln(n_{ij.}) + 2n\cdot\ln(n) - \sum_{i=1}^{r} 2n_{i..}\cdot\ln(n_{i..}) - \sum_{j=1}^{c} 2n_{.j.}\cdot\ln(n_{.j.}) \qquad (4.3.5\text{-}2)$$

und analog für die anderen Prüfgrößen.

Für das Modellbeispiel 1[2] erhält man hier unter Berücksichtigung der YATES-Korrektur :

$$2\hat{I}_{IJ} = 8{,}7872$$
$$2\hat{I}_{IK} = 12{,}0448$$
$$2\hat{I}_{JK} = 41{,}3602.$$

Da in allen drei Fällen $\chi^2_{c(1;0,05)} = 3{,}84$ kleiner ist, als die beobachteten Prüfgrößen, muß in allen Fällen die Nullhypothese abgelehnt werden. Zwischen allen Merkmalen besteht unbedingte Zweifachabhängigkeit.

---

1 Vgl. zum Nachweis der Anzahl der Freiheitsgrade die entsprechenden Ausführungen beim χ^2-Test auf unbedingte Zweifachunabhängigkeit auf S. 71 .

2 Vgl. die Erläuterungen zu Modellbeispiel 1 auf S. 24 ff. .

4.4 Die Ermittlung von Koeffizienten des einfachen Zusammenhangs zwischen drei nominalskalierten Merkmalen

4.4.1 Die Ermittlung von Koeffizienten des einfachen Zusammenhangs zwischen drei nominalskalierten Merkmalen auf der Basis des χ^2-Verfahrens

Wenn bei der Analyse einer dreidimensionalen Kontingenztabelle über den Nachweis eines bestehenden Zusammenhangs hinaus noch ein Maß für die Stärke des Zusammenhangs angegeben werden soll, kann zu diesem Zweck nicht auf die χ^2-Prüfgröße zurückgegriffen werden. Das Ergebnis eines χ^2-Tests hängt bei gegebener Dimensionierung der Kontingenztabelle wesentlich vom Untersuchungsumfang n ab, denn es gilt $\chi^2 \to \infty$, wenn $n \to \infty$.

Eine Maßgröße für die Stärke des Zusammenhangs muß demnach, wenn sie unter Verwendung eines χ^2-Ergebnisses definiert werden soll, bei vorgegebener Dimensionierung um die Größe des Untersuchungsumfangs "bereinigt" werden. Dies könnte zum Beispiel geschehen durch einfache Division durch n. Man erhält dadurch den "Koeffizienten der mittleren quadratischen Kontingenz"[1)]

$$\Phi^2 = \frac{\chi^2}{n} \qquad (4.4.1\text{-}1).$$

Solche Koeffizienten, die die Stärke des Zusammenhangs in einer Kontingenztabelle messen, bezeichnet man nach PEARSON allgemein als K o n t i n -

1) Vgl.hierzu: GOODMAN, L. A. und KRUSKAL, W. H.: Measures of association for cross-classifications, JASA 49 (1954), S. 739

g e n z k o e f f i z i e n t e n [1]. In mancher Hinsicht kann man sie als das nominalskalierte Analogon zu den metrischen Korrelationskoeffizienten ansehen. So weist PEARSON nach[2], daß der Korrelationskoeffizient R einer binormalverteilten Gesamtheit von einem Koeffizienten

$$KC = \sqrt{\frac{\Phi^2}{1 + \Phi^2}} = \sqrt{\frac{\chi^2}{n + \chi^2}} \qquad (4.4.1\text{-}2)$$

approximiert wird, der für die gleiche binormalverteilte Grundgesamtheit berechnet wird, wenn die Anzahl der Klassifikationen, in die die Gesamtheit unterteilt ist, sehr groß wird.

Allerdings ist für die Koeffizienten auf der Basis der χ^2-Prüfgröße keine ähnlich einleuchtende Interpretation möglich, wie für den Korrelationskoeffizienten R.

Der PEARSON'sche Kontingenzkoeffizient[3] KC wird null, wenn im Falle der Unabhängigkeit zwischen den zu untersuchenden Variablen $\chi^2 = 0$. Er wird allerdings im Falle vollständiger Abhängigkeit nicht gleich eins, sondern er bleibt stets kleiner als eins, wobei die maximale Größe jeweils vom Umfang der Kontingenztabelle abhängt. Eine

---

1 Vgl.: PEARSON, K.: On the theory of contingency and its relation to normal correlation, Draper's memoirs, Biometric Series No. 1, London 1904, zit.nach: KENDALL, M. G. und STUART, A.: The advanced theory..., Vol.2, a.a.O., S. 557 u.S.649.

2 Vgl. PEARSON, K.: On the theory ..., zit.nach: KENDALL, M. G. und STUART, A.: The advanced theory..., Vol.2, S. 557.

3 Es gibt noch eine Reihe weiterer Kontingenzkoeffizienten (z.B. von CRAMER, TSCHUPROW, GEBELEIN u.a.) auf der Basis der χ^2-Prüfgröße, die jedoch wegen ihrer großen Ähnlichkeit zum PEARSON'schen Kontingenzkoeffizienten nicht weiter erläutert werden sollen.

Vergleichbarkeit der verschiedenen Kontingenzkoeffizienten aus unterschiedlichen Kontingenztabellen ist somit nicht möglich.

Um diese Vergleichbarkeit dennoch in dem Sinne zu erreichen, daß alle Koeffizienten Werte zwischen 0 und 1 annehmen können[1], läßt sich eine "Normierung" mit Hilfe der jeweiligen maximalen Kontingenzkoeffizienten durchführen[2]. Im Falle einer zweidimensionalen quadratischen Kontingenztabelle liegt maximale Abhängigkeit dann vor, wenn in jeder Zeile und Spalte der Kontingenztabelle nur ein Beobachtungswert $n_{ij}>0$ vorzufinden ist[3]. In diesem Fall ist jeder Zeilensumme $n_{i.}$ eindeutig eine Spaltensumme $n_{.j}$ zugeordnet. Durch symmetrische Transformation läßt sich die Kontingenztabelle so darstellen, daß nur noch Beobachtungsfelder der Hauptdiagonalen besetzt sind. Es gilt dann :

$$n_{ij} > 0 \quad (i=j)$$

$$n_{ij} = 0 \quad (i \neq j).$$

In einer derartigen Kontingenztabelle mit maximaler Abhängigkeit ergibt sich ein maximaler Kontingenzkoeffizient von[4]

$$KC_{max} = \sqrt{\frac{r-1}{r}} \qquad (4.4.1\text{-}3),$$

wobei r die Zeilenzahl beziehungsweise Spaltenzahl angibt.

---

1 Vgl. z.B.: GOODMAN, L. A. und KRUSKAL, W. H.: Measures of association..., a.a.O., S. 738 .

2 Vgl. die Darstellung bei KENDALL, M. G. und STUART, A.: The advanced theory..., Vol.2, a.a.O., S. 557 .

3 Vgl. den Beweis bei : PAWLIK, K.: Der maximale Kontingenzkoeffizient im Falle nichtquadratischer Kontingenztafeln, Metrika 2(1959), S. 154 ff. .

4 Vgl. PAWLIK, K.: a.a.O., S. 156 .

Für den Fall nichtquadratischer Kontingenztabellen weist PAWLIK nach[1)], daß der maximale Kontingenzkoeffizient definiert ist als

$$KC_{max} = \sqrt{\frac{q-1}{q}} \qquad (4.4.1\text{-}4),$$

wobei q = Min(Zeilenzahl, Spaltenzahl).

Die Größe des maximalen Kontingenzkoeffizienten hängt im zweidimensionalen Fall also nur vom Umfang der Kontingenztabelle ab. Seine Größe ist unabhängig von der Verteilung der Beobachtungswerte entlang der Hauptdiagonalen, wie das in Tab. 16 wiedergegebene Zahlenbeispiel zeigt.

Tab. 16 : Zwei zweidimensionale Kontingenztabellen, deren Felder nur entlang der Hauptdiagonalen besetzt sind

I \ J	J_1	J_2	J_3	$\sum$
I_1	300	0	0	300
I_2	0	400	0	400
I_3	0	0	300	300
$\sum$	300	400	300	1000
$\chi^2 = 2.000$				
$KC = \sqrt{\frac{2.000}{2.000+1.000}}$				
$KC = 0{,}8165$				

I \ J	J_1	J_2	J_3	$\sum$
I_1	100	0	0	100
I_2	0	100	0	100
I_3	0	0	800	800
$\sum$	100	100	800	1000
$\chi^2 = 2.000$				
$KC = \sqrt{\frac{2.000}{2.000+1.000}}$				
$KC = 0{,}8165$				

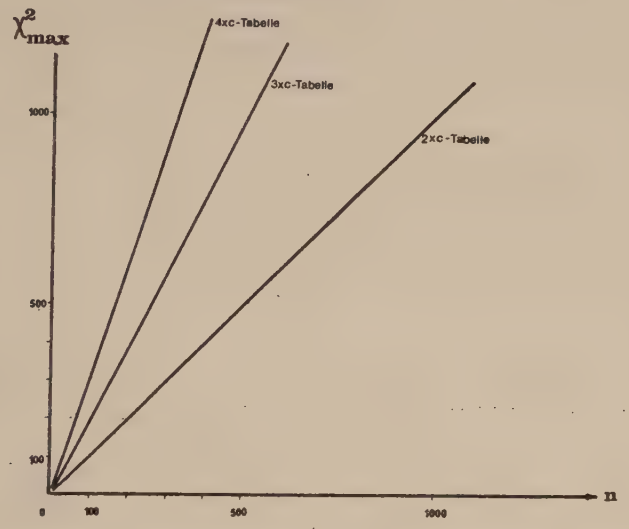
$$KC_{max} = \sqrt{\frac{3-1}{3}} = 0{,}8165$$

Die Größe des maximalen χ^2-Wertes in Abhängigkeit von der Größe des Untersuchungsumfangs bei verschiedenem Umfang der Kontingenztabelle zeigt sich

1 Vgl. den Beweis bei PAWLIK, K.: a.a.O., S. 157 ff. .

anschaulich in Abb. 11 .

Abb. 11 : Der maximale Wert einer χ^2-Prüfgröße in Abhängigkeit vom Untersuchungsumfang bei verschiedenen Größen von Kontingenztabellen. Die Größe c gibt dabei die Anzahl der Ausprägungen des 2. Merkmals an, wobei c größer oder gleich ist der angegebenen Anzahl von Ausprägungen des 1. Merkmals

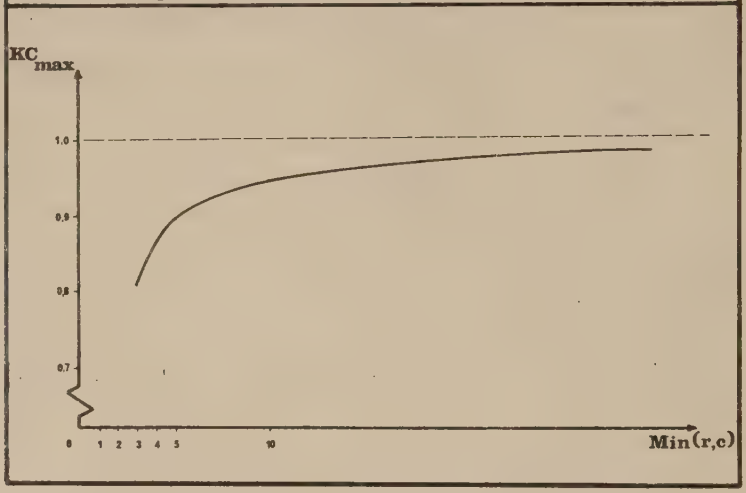


Demgemäß ergibt sich die graphische Darstellung der Größe des maximalen zweidimensionalen Kontingenzkoeffizienten in Abhängigkeit von der Dimension der Kontingenztabelle wie in Abb. 12 .

Bildet man den Quotienten aus beobachtetem Kontingenzkoeffizienten und dem in der betreffenden Tafel maximal möglichen Kontingenzkoeffizienten, so stellt dieser Quotient einen korrigierten Kontingenzkoeffizienten KC_c dar, der bei Unabhängigkeit

null wird und bei perfekter Abhängigkeit den Wert eins annimmt.

Abb. 12 : Die Größe des maximalen zweidimensionalen Kontingenzkoeffizienten in Abhängigkeit von der Größe der Kontingenztabelle



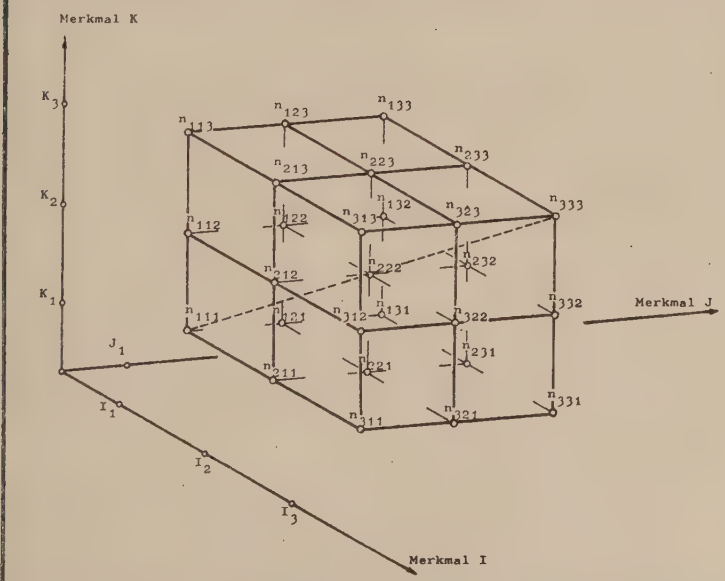
Betrachtet man nunmehr Kontingenzkoeffizienten, die die Stärke des Zusammenhangs zwischen drei Merkmalen angeben, so ergibt sich auch hier die Analogie zwischen dem metrischen Korrelationskoeffizienten R und dem Kontingenzkoeffizienten KC.

Für jeden der verschiedenen Unabhängigkeitstests bei drei Merkmalen läßt sich ein Kontingenzkoeffizient ermitteln. Diese Koeffizienten lassen sich gemäß den zugrundeliegenden χ^2-Prüfgrößen durch entsprechende Indices kennzeichnen.

Allerdings erscheint Vorsicht geboten bei der Interpretation der Kontingenzkoeffizienten für die

totale Abhängigkeit, denn die verschiedenen Kontingenzkoeffizienten für totale Abhängigkeit lassen sich nicht vergleichen. Diese Tatsache ergibt sich aus einer Weiterführung des Beweises von PAWLIK, daß maximale Abhängigkeit in einer Kontingenztabelle dann vorliegt, wenn nur die Felder der Hauptdiagonalen mit Beobachtungswerten $n_{ijk}>0$ besetzt sind[1]. Dieser Beweis läßt sich auch ohne Schwierigkeiten für den dreidimensionalen Fall führen. Die Hauptdiagonale eines dreidimensionalen Kontingenzwürfels ist wie in Abb. 13 dargestellt, definiert.

Abb. 13 : Darstellung der Hauptdiagonalen in einem dreidimensionalen Kontingenzwürfel vom Umfang 3 × 3 × 3
------- = Hauptdiagonale



1 Vgl. oben S. 99 ff. .

Man kann zeigen, daß nach entsprechenden Umformungen von Gleichungen (4.4.1-2) der Kontingenzkoeffizient einer dreidimensionalen Kontingenztabelle definiert ist als

$$KC_{total} = \sqrt{1 - \frac{1}{n \cdot \left[\sum_{i,j,k} \left(\frac{n^2_{ijk}}{n_{i..} \cdot n_{.j.} \cdot n_{..k}} \right) \right] \quad \forall_{ijk}}}$$

(4.4.1-5).

Um zu überprüfen, ob der durch (4.4.1-5) definierte Kontingenzkoeffizient eine Obergrenze hat, die kleiner als eins ist, wird untersucht, wie groß dieser Koeffizient im Falle maximaler Abhängigkeit werden kann.

Soll KC_{total} ein Maximum werden, so muß der Ausdruck

$$n \cdot \left[\sum_{i,j,k} \left(\frac{n^2_{ijk}}{n_{i..} \cdot n_{.j.} \cdot n_{..k}} \right) \right] \quad \forall_{ijk}$$

in Gleichung (4.4.1-5) für den Fall maximaler Abhängigkeit bestimmt werden. In diesem Falle gilt aber

$$n_{ijk} > 0 \quad (i=j=k)$$
$$n_{ijk} = 0 \quad (i \neq j \neq k).$$

Damit ergibt sich für die Beobachtungswerte auf der Hauptdiagonalen

$$n_{ijk} = n_{i..} = n_{.j.} = n_{..k} \quad (4.4.1-6).$$

Setzt man diese Beziehung in den zu maximierenden Ausdruck ein, so erhält man :

$$n \cdot \left[\sum_{i,j,k} \left(\frac{n^2_{ijk}}{n_{i..} \cdot n_{.j.} \cdot n_{..k}} \right) \right] \quad \begin{cases} = 0, \text{ wenn } i \neq j \neq k \\ = n \cdot \sum_{k} \frac{1}{n_{..k}}, \text{wenn } i=j=k. \end{cases}$$

Der Ausdruck

$$\sum_{k} \frac{1}{n_{..k}}$$

kann maximal gleich n werden; denn wenn zum Beispiel n=3 kann sich ergeben

$$n_{111} = 1 = n_{..1}$$

$$n_{222} = 1 = n_{..2}$$

$$n_{333} = 1 = n_{..3}$$

und demnach

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{n_{..k}} = 3 = n.$$

Damit wird der Kontingenzkoeffizient KC_{total} im Falle maximaler Abhängigkeit zu

$$KC_{max_{total}} = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{n^2}} \quad (4.4.1\text{-}7).$$

Dieses Ergebnis bedeutet aber, daß wegen der Abhängigkeit von $KC_{max_{total}}$ vom Untersuchungsumfang n ein Vergleich verschiedener KC_{total} aus unterschiedlichen Untersuchungsgesamtheiten nicht möglich ist.

Zudem ist die Größe von KC_{total} nicht unabhängig von der Häufigkeitsverteilung der Beobachtungswerte entlang der Hauptdiagonalen, wie das folgende Zahlenbeispiel zeigt:

Tab. 17 : Zwei dreidimensionale Kontingenztabellen deren Felder nur entlang der Hauptdiagonalen besetzt sind

I	J \ K	K_1	K_2	Σ
I_1	J_1	500	0	500
	J_2	0	0	0
I_2	J_1	0	0	0
	J_2	0	500	500
Σ		500	500	1000

$\chi^2_{total} = 3.000$

$KC_{total} = \sqrt{\frac{3.000}{4.000}}$

$KC_{total} = 0,866$

I	J \ K	K_1	K_2	Σ
I_1	J_1	200	0	200
	J_2	0	0	0
I_2	J_1	0	0	0
	J_2	0	800	800
Σ		200	800	1000

$\chi^2_{total} = 5.250$

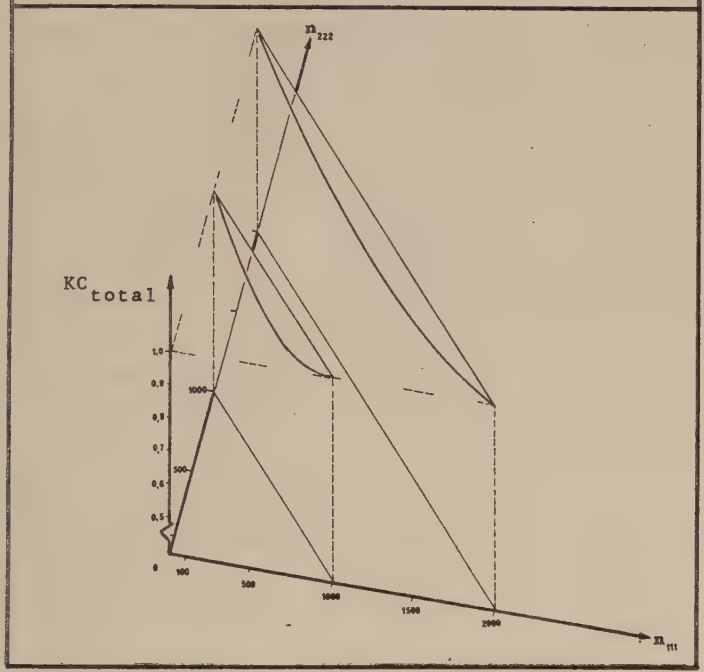
$KC_{total} = \sqrt{\frac{5.250}{6.250}}$

$KC_{total} = 0,917$

Die Abhängigkeit von KC_{total} von der Verteilung der Beobachtungswerte entlang der Hauptdiagonalen veranschaulicht Abb. 14 .

Sollte im Einzelfall der Koeffizient KC_{total} trotz der angeführten Bedenken dennoch berechnet werden, so erübrigt sich eine Korrektur des ermittelten Wertes um $KC_{max_{total}}$, da dieser maximale Koeffizient schon für relativ kleine Untersuchungsumfänge fast den Wert 1 erreicht. Dies ergibt sich aus Tabelle 18, in der neben der Größe von $KC_{max_{total}}$ auch deren Kehrwert als Korrekturfaktor für einen beobachteten Kontingenzkoeffizienten angegeben ist.

Abb. 14 : Die Abhängigkeit der Größe des totalen Kontingenzkoeffizienten von der Verteilung der Beobachtungshäufigkeiten auf der Hauptdiagonalen einer 2 × 2 × 2 - Kontingenztabelle für Beobachtungsumfänge von n=1.000 und n=2.000



Weniger problematisch wird die Interpretation von multiplen und partiellen Kontingenzkoeffizienten und solchen für unbedingte Zweifachabhängigkeit.

Der multiple Kontingenzkoeffizient läßt sich interpretieren als das Maß der Stärke des Zusammenhangs zwischen einem Merkmal auf der einen Seite und den anderen Merkmalen auf der anderen Seite. Den auf der Basis des entsprechenden χ^2-Wertes ermittelten multiplen Kontingenzkoeffizienten kann man in

Tab. 18 : Der maximale totale Kontingenzkoeffizient und dessen Kehrwert in Abhängigkeit von ausgewählten Untersuchungsumfängen

Untersuchungsumfang	maximaler totaler Kontingenzkoeffizient $KC_{max_{total}}$	$1/KC_{max_{total}}$
10	0,9949874	1,0050378
25	0,9991999	1,0008007
50	0,9997999	1,0002001
100	0,9999499	1,0000501
1000	0,9999995	1,0000005

seiner Größe "normieren". Man verwendet hierzu den maximalen Kontingenzkoeffizienten in Gleichung (4.4.1-4). Dabei gilt hier :

$$q = \text{Min}\{r,(c\cdot\ell)\} \text{ für } KC_{I(JK)}$$

beziehungsweise $q = \text{Min}\{c,(r\cdot\ell)\}$ für $KC_{J(IK)}$

beziehungsweise $q = \text{Min}\{\ell,(r\cdot c)\}$ für $KC_{K(IJ)}$.

Auch die Ermittlung und Interpretation von partiellen Kontingenzkoeffizienten bereiten keine Schwierigkeiten. Lediglich der sich in der partiellen Betrachtungsweise vermindernde Beobachtungsumfang muß bei der Berechnung der Koeffizienten nach (4.4.1-2) beachtet werden. Hier sollte ebenfalls die oben angesprochene "Normierung" mittels des maximalen Kontingenzkoeffizienten gemäß Gleichung (4.4.1-4) verwandt werden.

In der gleichen Weise wird der Kontingenzkoeffizient für einen unbedingten Zweifach-Zusammenhang berechnet und korrigiert.

Berechnet man aus den entsprechenden χ^2-Werten die verschiedenen Kontingenzkoeffizienten für das Modellbeispiel 1[1], so zeigen sich die in Tab. 19 zusammengefaßten Ergebnisse.

Tab. 19 : Übersicht über die verschiedenen Kontingenzkoeffizienten, maximale Kontingenzkoeffizienten und korrigierte Kontingenzkoeffizienten für das Modellbeispiel[1]

Kontingenzkoeffizient	Größe des Kontingenzkoeffizienten	entsprechender maximaler Kontingenzkoeffizient	Größe des korrigierten Kontingenzkoeffizienten
KC_{total}	0,2704	-	0,2704
$KC_{I(JK)}$	0,1873	0,7071	0,2649
$KC_{J(IK)}$	0,2476	0,7071	0,3501
$KC_{K(IJ)}$	0,2543	0,7071	0,3597
KC_{IJ/K_1}	0,0585	0,7071	0,0827
KC_{IJ/K_2}	0,2003	0,7071	0,2832
KC_{IK/J_1}	0,0600	0,7071	0,0848
KC_{IK/J_2}	0,2041	0,7071	0,2887
KC_{JK/I_1}	0,0023	0,7071	0,0033
KC_{JK/I_2}	0,2772	0,7071	0,3921
KC_{IJ}	0,0937	0,7071	0,1325
KC_{IK}	0,1092	0,7071	0,1545
KC_{JK}	0,1990	0,7071	0,2815

Ein gewisser Nachteil bei der Interpretation von Koeffizienten auf der Basis des χ^2-Verfahrens soll abschließend nicht unerwähnt bleiben : Für diese Kontingenzkoeffizienten sind bisher keine Signi-

1 Vgl. die Erläuterungen zu Modellbeispiel 1 auf S. 24 ff. .

fikanztests bekannt. Es gibt hier bisher nur Näherungslösungen für den Spezialfall einer 2 × 2-Kontingenztabelle[1]. Allerdings ist die Signifikanz eines Kontingenzkoeffizienten bei signifikantem Ergebnis des zugrundeliegenden χ^2-Tests ebenfalls anzunehmen.

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß Kontingenzkoeffizienten auf der Basis des χ^2-Verfahrens nicht definiert sind, wenn die zugrundeliegende χ^2-Prüfgröße nicht definiert ist, weil

(1) die Beobachtungsgesamtheit in einem Feld der Kontingenztabelle liegt oder
(2) die Beobachtungsgesamtheit in einer Zeile oder Spalte oder Schicht der Kontingenztabelle liegt.

4.4.2 Die Ermittlung von Koeffizienten des einfachen Zusammenhangs zwischen drei nominalskalierten Merkmalen auf der Basis des informationstheoretischen Verfahrens

Auch mit Hilfe des oben dargestellten informationstheoretischen Unabhängigkeitstests lassen sich Kontingenzkoeffizienten als Maßgrößen für die Stärke von Zusammenhängen ermitteln. Wie in Unterabschnitt 4.3.1 dargestellt wurde, verwendet man zum Beispiel als Prüfgröße für den Unabhängigkeitstest zwischen nominalskalierten Variablen

$$2\hat{I}_{total} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \sum_{k=1}^{\ell} 2n_{ijk} \cdot \ln\left[\frac{n^2 \cdot n_{ijk}}{n_{i..} \cdot n_{.j.} \cdot n_{..k}}\right] \qquad (4.4.2\text{-}1)$$

1 Vgl. die entsprechenden Ausführungen bei : KENDALL, M. G. und STUART, A.: The advanced theory..., Vol. 2, a.a.O., S. 559 ff. .

Diesem Ausdruck liegt die gemeinsame Information zwischen den drei Merkmalen I, J und K zugrunde. Bezieht man die Prüfgröße $2\hat{I}$ auf die ursprüngliche Unsicherheit in einem Punkt des Modells, die ausgedrückt wird durch den Wert der SHANNON'schen Entropie, so gibt dieser Quotient an, wieviel von der gemeinsamen Information schon in der Information über den einen betrachteten Punkt des Modells enthalten war[1].

Bezieht man diese Aussage auf das Modell der mehrdimensionalen Unabhängigkeitsanalyse nominalskalierter Merkmale, so gibt der Koeffizient an, wieviel von der gemeinsamen Information über alle Merkmale schon in der Information über ein Merkmal enthalten war, denn je höher der Anteil der betrachteten Einzelinformation an der Gesamtinformation ist, desto stärker ist der Zusammenhang.

Der Kontingenzkoeffizient zur Messung der totalen Abhängigkeit kann mithin definiert werden als

$$KI_{total/\underline{I}} = 2\hat{I}_{total}/2H(I)$$

oder

$$KI_{total/\underline{I}} = \frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{\ell} 2n_{ijk} \cdot \ln\left[\frac{n^2 \cdot n_{ijk}}{n_{i..} \cdot n_{.j.} \cdot n_{..k}}\right]}{-\sum_{i=1}^{r} 2n_{i..} \cdot \ln\left(\frac{n_{i..}}{n}\right)} \qquad (4.4.2\text{-}2).$$

Entsprechende Koeffizienten $KI_{total/\underline{J}}$ und $KI_{total/\underline{K}}$ lassen sich analog berechnen.

Dieser Koeffizient wird im Falle absoluter Unabhängigkeit zwischen den Merkmalen offensichtlich gleich

---

1 Vgl. hierzu : BIHN, W.: a.a.O., S. 76; McGILL, W.J.: Multivariate information transmission, Psychometrika 19 (1954), S. 99 ff. .

null.Aber er kann bei starker Abhängigkeit Werte annehmen, die größer als eins sind. Er entspricht damit nicht den allgemeinen Postulaten an einen Kontingenzkoeffizienten, bei Unabhängigkeit den Wert null und bei perfekter Abhängigkeit den Wert eins anzunehmen.

Es soll nun überprüft werden, wie groß KI_{total} maximal werden kann. Wie in Unterabschnitt 4.4.1 ausgeführt wurde, liegt maximale Abhängigkeit zwischen drei Merkmalen dann vor, wenn in dem entsprechenden Kontingenzwürfel nur die Hauptdiagonale mit Beobachtungswerten $n_{ijk} > 0$ besetzt ist, während alle anderen Felder der Tabelle Beobachtungen von $n_{ijk} = 0$ aufweisen. Gemäß Gleichung (4.4.1-6) gilt dann :

$$n_{ijk} = n_{i..} = n_{.j.} = n_{..k}$$

Setzt man diese Beziehung in Gleichung (4.4.2-2) ein, erhält man :

$$KI_{max_{total/\underline{I}}} = \frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{\ell} 2n_{ijk} \cdot \ln\left[\frac{n^2 \cdot n_{ijk}}{n_{ijk} \cdot n_{ijk} \cdot n_{ijk}}\right]}{-\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{\ell} 2n_{ijk} \cdot \ln\left(\frac{n_{ijk}}{n}\right)}$$

und nach einigen Umformungen ergibt sich

$$KI_{max_{total/\underline{I}}} = \frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{\ell} 2n_{ijk} \cdot 2 \cdot \ln\left(\frac{n}{n_{ijk}}\right)}{+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{\ell} 2n_{ijk} \cdot \ln\left(\frac{n}{n_{ijk}}\right)}$$

$$KI_{max_{total/\underline{I}}} = 2$$

Der totale informationstheoretische Kontingenzkoeffizient kann also im Falle maximaler Abhängigkeit den Wert 2 annehmen. Um zu erreichen, daß informationstheoretische totale Kontingenzkoeffizienten wie andere dementsprechende Koeffizienten nur Werte zwischen null und eins annehmen können, müssen alle nach Gleichung (4.4.2-2) ermittelten Koeffizienten mit einem Korrekturfaktor von (1/2) multipliziert werden.

Bei der Verwendung dieser und der folgenden informationstheoretischen Kontingenzkoeffizienten ist aber zu beachten, daß diese Koeffizienten im Vergleich zu den Koeffizienten auf Basis der χ^2-Prüfgröße eine wesentlich andere Definition haben. Diese führt zu völlig anderen Interpretationen der informationstheoretischen Koeffizienten, welche eine Vergleichbarkeit mit anderen Koeffizienten ausschließt. Aus der unterschiedlichen Definition ergibt sich zudem, daß die informationstheoretischen Koeffizienten stark von den entsprechenden χ^2 -Kontingenzkoeffizienten abweichen, außer im Falle der Unabhängigkeit oder perfekter Abhängigkeit.

Neben den informationstheoretischen Kontingenzkoeffizienten für die Stärke der totalen Abhängigkeit kann man aus dem Modell der Informationstheorie auch multiple und partielle Kontingenzkoeffizienten ableiten und berechnen. So gibt zum Beispiel der multiple Kontingenzkoeffizient

$$KI_{I(\underline{JK})} = \frac{2\hat{I}_{I(JK)}}{-\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{\ell} 2n_{.jk} \cdot \ln\left(\frac{n_{.jk}}{n}\right)} \qquad (4.4.2\text{-}3)$$

an, wieviel von der gemeinsamen Information über I und (JK) bereits in der Information über (JK) enthalten war. Entsprechend läßt sich der multiple Kontingenzkoeffizient auch angeben als

$$KI_{\underline{I}(JK)} = \frac{2\hat{I}_{I(JK)}}{-\sum_{i=1}^{r} 2n_{i..} \cdot \ln(\frac{n_{i..}}{n})} \quad (4.4.2\text{-}4),$$

wenn man die Analyse auf die Ausgangsinformation in I bezieht[1].

Die partiellen Kontingenzkoeffizienten

$$KI_{\underline{I}J/K_k} = \frac{2\hat{I}_{IJ/K_k}}{-\sum_{i=1}^{r} 2n_{i.k} \cdot \ln(\frac{n_{i.k}}{n_{..k}})} \quad (4.4.2\text{-}5)$$

und

$$KI_{I\underline{J}/K_k} = \frac{2\hat{I}_{IJ/K_k}}{-\sum_{j=1}^{c} 2n_{.jk} \cdot \ln(\frac{n_{.jk}}{n_{..k}})} \quad (4.4.2\text{-}6)$$

lassen sich entsprechend interpretieren, ebenso wie die Koeffizienten des unbedingten zweifachen Zusammenhangs

$$KI_{\underline{I}J} = \frac{2\hat{I}_{IJ}}{-\sum_{i=1}^{r} 2n_{i..} \cdot \ln(\frac{n_{i..}}{n})} \quad (4.4.2\text{-}7)$$

und

$$KI_{I\underline{J}} = \frac{2\hat{I}_{IJ}}{-\sum_{j=1}^{c} 2n_{.j.} \cdot \ln(\frac{n_{.j.}}{n})} \quad (4.4.2\text{-}8).$$

Die informationstheoretischen Kontingenzkoeffizienten für die multiple, partielle und unbedingt-

---

1 Auf die Angabe der entsprechenden Kontingenzkoeffizienten der anderen möglichen Merkmalskombinationen und Betrachtungsweisen soll im folgenden verzichtet werden.

zweifache Problemstellungen werden im Falle bestehender Unabhängigkeit gleich null, im Falle perfekter Abhängigkeit gleich eins. Einer Korrektur, wie bei den entsprechenden χ^2-Koeffizienten bedarf es hier nicht.

Ein informationstheoretischer Kontingenzkoeffizient ist allerdings nicht definiert, wenn

(1) die Beobachtungsgesamtheit in einem Feld der Kontingenztabelle liegt oder

(2) die Beobachtungsgesamtheit in einer Zeile, Spalte oder Schicht der Kontingenztabelle liegt und man die Betrachtung auf die Information dieser Zeile, Spalte oder Schicht bezieht.

Die Berechnungsergebnisse der informationstheoretischen Kontingenzkoeffizienten für das Modellbeispiel 1[1)] sind in Tabelle 20 wiedergegeben.

In ihrer Anwendung sind die informationstheoretischen Kontingenzkoeffizienten mit der gleichen Einschränkung zu verwenden, wie die entsprechenden χ^2-Koeffizienten, daß ein Signifikanztest im herkömmlichen Sinne noch nicht nachgewiesen wurde.

---

1 Vgl. die Erläuterungen zu Modellbeispiel 1 auf S. 24 ff. .

Tab. 20 : Übersicht über die verschiedenen Kontingenzkoeffizienten und korrigierten Kontingenzkoeffizienten auf der Basis des informationstheoretischen Verfahrens für das Modellbeispiel 1

Kontingenzkoeffizient	Größe des Kontingenzkoeffizienten	Größe des korrigierten Kontingenzkoeffizienten
$KI_{total/\underline{I}}$	0,0635	0,0318
$KI_{total/\underline{J}}$	0,0591	0,0296
$KI_{total/\underline{K}}$	0,0578	0,0289
$KI_{\underline{I}(JK)}$	0,0298	-
$KI_{I(\underline{JK})}$	0,0139	-
$KI_{\underline{J}(IK)}$	0,0498	-
$KI_{J(\underline{IK})}$	0,0256	-
$KI_{\underline{K}(IJ)}$	0,0511	-
$KI_{K(\underline{IJ})}$	0,0271	-
$KI_{\underline{IJ}/K_1}$	0,0030	-
$KI_{I\underline{J}/K_1}$	0,0029	-
$KI_{\underline{IJ}/K_2}$	0,0358	-
$KI_{I\underline{J}/K_2}$	0,0339	-
$KI_{\underline{IK}/J_1}$	0,0032	-
$KI_{I\underline{K}/J_1}$	0,0031	
$KI_{\underline{IK}/J_2}$	0,0370	-
$KI_{I\underline{K}/J_2}$	0,0336	-
$KI_{\underline{JK}/I_1}$	0,0000	-
$KI_{J\underline{K}/I_1}$	0,0000	-
$KI_{\underline{JK}/I_2}$	0,0647	-
$KI_{J\underline{K}/I_2}$	0,0628	-
$KI_{\underline{IJ}}$	0,0073	-
$KI_{I\underline{J}}$	0,0068	-
$KI_{\underline{IK}}$	0,0099	-
$KI_{I\underline{K}}$	0,0091	-
$KI_{\underline{JK}}$	0,0314	-
$KI_{J\underline{K}}$	0,0307	-

4.4.3 Die Ermittlung von Koeffizienten des einfachen Zusammenhangs zwischen drei nominalskalierten Merkmalen auf der Basis von Modellen optimaler Vorhersage[1)]

Um dem Nachteil des bei den herkömmlichen Kontingenzkoeffizienten fehlenden Signifikanztests zu begegnen haben GOODMAN und KRUSKAL weitere Koeffizienten definiert und für diese zum Teil Verteilungsgesetze nachgewiesen. Die Koeffizienten von GOODMAN und KRUSKAL basieren vor allem auf Modellen optimaler Vorhersage. Der Anschaulichkeit halber sollen sie zunächst für den zweidimensionalen Fall erläutert werden.

Angenommen, es bestehe eine statistische Gesamtheit vom Umfang n. Jedes ihrer Elemente wird sowohl nach einem Merkmal I mit den Ausprägungen I_i, $(i=1,2,3,\ldots,r)$ als auch nach einem Merkmal J mit den Ausprägungen J_j, $(j=1,2,3,\ldots,c)$, klassifiziert. Unterstellt sei weiterhin ein multinomiales Stichprobenmodell, das heißt, das Ziehen eines oder mehrerer Elemente als Stichprobe beeinflußt nicht die anteilsmäßige Verteilung der Elemente auf die Merkmalsausprägungen.

Wählt man ein Element e der Gesamtheit zufällig

---

1 Zu den Ausführungen dieses Unterabschnitts vgl.: GOODMAN, L. A. und KRUSKAL, W. H.: Measures of association ....., a.a.O., S. 732 ff. ; GOODMAN, L. A. und KRUSKAL, W. H.: Measures of association for cross-classifications. II : Further discussion and references, JASA 54 (1959), S. 123 ff.; GOODMAN, L. A. und KRUSKAL, W. H.: Measures of association for cross-classifications. III : Approximate sampling theory, JASA 58 (1963), S. 310 ff., hier besonders den Beweis über die Verteilungseigenschaften des Standardfehlers, S. 358 ff. .

aus, so kann man sich zum Beispiel fragen, welche Ausprägung von J das Element wohl haben wird. Um eine Vorhersage über die J-Ausprägung dieses Elements zu machen, kann man sich einer o p t i m a l e n oder einer p r o p o r t i o n a l e n Vorhersage bedienen[1].

Im Falle einer optimalen Vorhersage wird man die Ausprägung von J schätzen, die den Modus der Häufigkeitsverteilung der Spaltenelemente beinhaltet. Die Merkmalsausprägung des Spaltenmerkmals J, die die maximale Häufigkeit aufweist, soll im folgenden als "Modal-Spalte" bezeichnet werden. Kennzeichnet man die Modal-Spalte durch den Ausdruck

$$\underbrace{\underset{j}{\text{Max}}}\,(n_{.j}) \qquad (4.4.3\text{-}1),$$

das heißt durch den über alle Ausprägungen von J maximalen Wert der Randsummen $n_{.j}$, so kann man die Wahrscheinlichkeit, daß das Element e der Modal-Spalte angehört angeben als

$$W_1\left[e \in \underbrace{\underset{j}{\text{Max}}}\,(n_{.j})\right] = \frac{\underbrace{\underset{j}{\text{Max}}(n_{.j})}}{n} = \underbrace{\underset{j}{\text{Max}}(p_{.j})} \qquad (4.4.3\text{-}2).$$

Demgemäß ist die Wahrscheinlichkeit, daß e der Modal-Spalte nicht angehört, gleich

$$W_2\left[e \notin \underbrace{\underset{j}{\text{Max}}(n_{.j})}\right] = 1 - \underbrace{\underset{j}{\text{Max}}(p_{.j})} \qquad (4.4.3\text{-}3).$$

Soll nun eine Vorhersage über die J-Ausprägung des

---

1 Da Signifikanzprüfungen bisher nur für Kontingenzkoeffizienten auf der Basis optimaler Vorhersage nachgewiesen sind, sollen nur diese hier erläutert werden. Über Koeffizienten auf der Basis proportionaler Vorhersage vgl.: GOODMAN, L. A. und KRUSKAL, W. H.: Measures of association ..., a.a.O., S. 759 f. .

Elementes e gemacht werden, wenn schon bekannt ist, daß das Element die m-te Ausprägung des Zeilenmerkmals I aufweist, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Element der Modal-Spalte angehört gegeben durch

$$W_3\left[e \in \underbrace{\operatorname{Max}_j(n_{ij}/i=m)}\right] = \underbrace{\operatorname{Max}_j(p_{ij}/i=m)} \quad (4.4.3\text{-}4).$$

Demgemäß ist die Wahrscheinlichkeit, daß e der Modal-Spalte nicht angehört, im Falle einer optimalen Vorhersage also die Wahrscheinlichkeit, eine falsche Vorhersage zu machen, gleich

$$W_4\left[e \notin \underbrace{\operatorname{Max}_j(n_{ij}/i=m)}\right] = 1 - \underbrace{\operatorname{Max}_j(p_{ij}/i=m)} \quad (4.4.3\text{-}5).$$

Bezieht man diese Wahrscheinlichkeitsaussagen auf die Gesamtheit einer Kontingenztabelle, das heißt, will man eine Vorhersage auf die Ausprägung von J machen bei Kenntnis der Ausprägung von I, ohne daß diese I-Ausprägung näher spezifiziert ist, so gelten die Beziehungen

$$W_5\left[e \in \underbrace{\operatorname{Max}_j(n_{ij})}\right] = \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\operatorname{Max}_j(p_{ij})} \quad (4.4.3\text{-}6)$$

beziehungsweise

$$W_6\left[e \notin \underbrace{\operatorname{Max}_j(n_{ij})}\right] = 1 - \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\operatorname{Max}_j(p_{ij})} \quad (4.4.3\text{-}7).$$

Wenn zum Beispiel $W_2 = W_6$, dann hat die Kenntnis der Ausprägung des Merkmals I keine Verminderung des Risikos einer falschen Vorhersage der J-Ausprägung mit sich gebracht. Aus diesem Grund ergibt sich unmittelbar die Beziehung

$$W_2 \geq W_6 \qquad (4.4.3\text{-}8).$$

Wenn $W_2 > W_6$, dann hat die Kenntnis der Ausprägung von I das Risiko einer falschen Vorhersage der J-Ausprägung vermindert. Je höher die Verminderung des Voraussagerisikos ist, desto stärker wirkt Merkmal I auf das Merkmal J ein, desto stärker ist der Zusammenhang zwischen den beiden Merkmalen.

Die Messung der Stärke dieses Zusammenhangs kann dann durch einen Koeffizienten erfolgen, der die relative Verminderung des Voraussagefehlers mißt, zum Beispiel durch den Koeffizienten[1]

$$\lambda_j = \frac{W_2 - W_6}{W_2} = \frac{\sum_{i=1}^{r} \underset{j}{\underbrace{Max}}(p_{ij}) - \underset{j}{\underbrace{Max}}(p_{.j})}{1 - \underset{j}{\underbrace{Max}}(p_{.j})} \qquad (4.4.3\text{-}9)$$

Drückt man diesen Koeffizienten in absoluten Beobachtungshäufigkeiten aus, ergibt sich[2]

$$\lambda_j = \frac{\sum_{i=1}^{r} \underset{j}{\underbrace{Max}}(n_{ij}) - \underset{j}{\underbrace{Max}}(n_{.j})}{n - \underset{j}{\underbrace{Max}}(n_{.j})} \qquad (4.4.3\text{-}10).$$

---

1 Vgl.: GOODMAN, L. A. und KRUSKAL, W. H.: Measures of association ... , a.a.O., S. 741 f. .

2 Analog läßt sich ableiten :

$$\lambda_i = \frac{\sum_{j=1}^{c} \underset{i}{\underbrace{Max}}(n_{ij}) - \underset{i}{\underbrace{Max}}(n_{i.})}{n - \underset{i}{\underbrace{Max}}(n_{i.})} ,$$

vgl.: GOODMAN, L. A. und KRUSKAL, W. H.: Measures of association ... , a.a.O., S.743 .

Dieser Koeffizient hat die folgenden Eigenschaften[1]:

(1) λ_j ist nicht definiert, wenn die Untersuchungsgesamtheit in einem Feld, einer Spalte, Zeile oder Schicht der Kontingenztabelle liegt.

(2) In allen anderen Fällen liegt λ_j zwischen null und eins einschließlich.

(3) Im Falle statistischer Unabhängigkeit, das heißt Unabhängigkeit im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird $\lambda_j = 0$. Daraus läßt sich aber nicht der Umkehrschluß ableiten, denn λ_j mißt eine bestimmte Art der Abhängigkeit, die nicht immer mit der statistischen Abhängigkeit übereinstimmen muß.

(4) λ_j verändert sich nicht bei symmetrischer Transformation der Merkmalsausprägungen.

In der geschilderten Weise läßt sich auch ein Koeffizient symmetrischer optimaler Vorhersage ableiten. Dieser ist definiert als[2]

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{r} \underbrace{\text{Max}(n_{ij})}_{j} + \sum_{j=1}^{c} \underbrace{\text{Max}(n_{ij})}_{i} - \underbrace{\text{Max}(n_{.j})}_{j} - \underbrace{\text{Max}(n_{i.})}_{i}}{2n - \left(\underbrace{\text{Max}(n_{.j})}_{j} + \underbrace{\text{Max}(n_{i.})}_{i}\right)}$$

(4.4.3-11)

Wenn die Untersuchungsgesamtheit als Stichprobe aus einer übergeordneten Gesamtheit zu interpretieren ist, weisen GOODMAN und KRUSKAL für die verschiedenen λ-Koeffizienten Standardfehler für eine Standardnormalverteilung nach, die es ermöglichen, von dem in der Stichprobe nachgewiesenen λ mittels eines Konfidenzintervalls auf den unbekannten Zusammenhangsparameter Λ in der Grundgesamtheit zu schließen[3]. Diese Standardfehler sollen aber für

1 Vgl.: GOODMAN, L. A. und KRUSKAL, W. H.: Measures of association ... , a.a.O., S. 742

2 Vgl.: GOODMAN, L. A. und KRUSKAL, W. H.: Measures of association ... , a.a.O., S. 743

3 Vgl.: GOODMAN, L. A. und KRUSKAL, W. H.: Measures of association ... III, a.a.O., S. 315 ff.

den zweidimensionalen Fall nicht näher erläutert werden.

Bei der Zusammenhangsanalyse von drei Merkmalen lassen sich nach GOODMAN und KRUSKAL die Stärken von totalen, multiplen, partiellen und unbedingt-zweifachen Zusammenhängen messen. Allerdings sind Standardfehler bisher nur für multiple und partielle Koeffizienten nachgewiesen, weshalb auf die Darstellung eines Koeffizienten des totalen Zusammenhangs nicht näher eingegangen wird.

Untersucht man einen multiplen Zusammenhang zwischen den Merkmalen I, J und K, so ergibt sich dafür zum Beispiel die Prüfgröße[1)]

$$\lambda_{j\ J(IK)} = \frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} \underbrace{Max(n_{ijk})}_{j} - \underbrace{Max(n_{.j.})}_{j}}{n - \underbrace{Max(n_{.j.})}_{j}} \qquad (4.4.3\text{-}12).$$

Berechnet man die λ-Koeffizienten für das Modellbeispiel 1[2)], so gelangt man zu den folgenden Ergebnissen :

$$\lambda_{i\ I(JK)} = \frac{(150 + 100 + 130 + 300) - 680}{1.000 - 680} = 0$$

$$\lambda_{j\ J(IK)} = \frac{(90 + 80 + 150 + 300) - 600}{1.000 - 600} = 0{,}05$$

$$\lambda_{k\ K(IJ)} = \frac{(80 + 90 + 150 + 300) - 550}{1.000 - 550} = 0{,}1556$$

Soll von der Größe eines in einer Stichprobe beobachteten multiplen λ-Koeffizienten auf den entsprechenden multiplen Kontingenzkoeffizienten Λ in der

---

1 Analog lassen sich multiple Koeffizienten $\lambda_{i\ I(JK)}$ und $\lambda_{k\ K(IJ)}$ definieren. Vgl.: GOODMAN, L. A. und KRUSKAL, W. H.: Measures of association ..., a.a.O., S. 761 f. .

2 Vgl. die Erläuterungen zu Modellbeispiel 1 auf S. 24 ff. .

Grundgesamtheit geschlossen werden, so kann man sich hier einer Intervallschätzung bedienen. Dafür müssen aber die folgenden Voraussetzungen vorliegen[1] :

(1) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der einzelnen Untersuchungsobjekte muß einer Multinomialverteilung entsprechen.

(2) Die $\underset{i}{Max}(n_{ijk})$ und $\underset{i}{Max}(n_{i..})$ sowie die entsprechenden Maxima der anderen Merkmale müssen eindeutig sein.

(3) Die Maxima der Randsummen müssen kleiner als n sein, da λ sonst nicht definiert ist.

(4) λ darf nicht null oder eins sein.

Zum Beispiel gilt für den Schluß von $\lambda_{k\ K(IJ)}$ auf $\Lambda_{k\ K(IJ)}$ das Konfodenzintervall

$$W(\lambda_{k\ K(IJ)} - z \cdot s_k \leq \Lambda_{k\ K(IJ)} \leq \lambda_{k\ K(IJ)} + z \cdot s_k) = 1-\alpha \qquad (4.4.3\text{-}13),$$

wobei der Standardfehler s_k definiert ist als[2]:

$$s_k = \sqrt{\frac{\left[n - \sum_{ij}\sum_{k} \underset{k}{Max}(n_{ijk})\right] \cdot \left[\sum_{ij}\sum_{k} \underset{k}{Max}(n_{ijk}) \underset{k}{Max}(n_{..k}) - 2\sum_{ji}^{c} \underset{k}{Max}(n_{ijk})\right]}{\left(n - \underset{k}{Max}(n_{..k})\right)^3}} \cdot \Psi_{ijk} \qquad (4.4.3\text{-}14).$$

1 Vgl. die Ausführungen bei : GOODMAN, L. A. und KRUSKAL, W. H.: Measures of association ... III, a.a.O., S. 316 .

2 Dieser Standardfehler ergibt sich aus der Erweiterung des bei GOODMAN und KRUSKAL angegebenen zweidimensionalen Standardfehlers um eine Dimension in multipler Betrachtungsweise. Vgl.: GOODMAN, L. A. und KRUSKAL, W. H.: Measures of association ... III, a.a.O., S. 315. Im Gegensatz zur sonstigen Vorgehensweise wurde hier wegen der Übersichtlichkeit auf die Wiedergabe der vollständigen Summationsindices verzichtet.

In diesem Ausdruck kennzeichnet

$$\sum_{i}^{c} \underbrace{\text{Max}}_{k}(n_{ijk})$$

bei vorgegebenem j die Summe aller $\underbrace{\text{Max}}_{k}(n_{ijk})$, die aus der Schicht stammen, für die $\underbrace{\text{Max}}_{k}(n_{..k})$ gilt.

Verdeutlicht man sich dies anhand von Modellbeispiel11[1], so zeigt sich :

I	J	K	K_1	K_2
I_1	J_1		80†	70
	J_2		90†	80
I_2	J_1		150†	100
	J_2		130	300†

Die mit einem † gekennzeichneten Häufigkeiten stellen die jeweiligen $\underbrace{\text{Max}}_{k}(n_{ijk})$ dar, wenn j jeweils vorgegeben ist. Da $\underbrace{\text{Max}}_{k}(n_{..k})$ hier für die Schicht K_2 vorliegt, ist

$$\sum_{j}\sum_{i}^{c} \underbrace{\text{Max}}_{k}(n_{ijk}) = 300$$

Berechnet man nun den angegebenen Standardfehler, so ergibt sich

$$s_k = \sqrt{\frac{(1.000-620)\cdot(620+550-2\ 300)}{(1.000-550)^3}} = 0{,}04875,$$

und man erhält das Konfidenzintervall

$$W(0{,}1556-1{,}96\cdot 0{,}4875 \leq \Lambda_{k\ K(IJ)} \leq 0{,}1556+1{,}96\ 0{,}4875)=0{,}95$$

---

1 Vgl. die Erläuterungen zu Modellbeispiel 1 auf S. 24 ff. .

$$W(0{,}0601 \leq \Lambda_{k\ K(IJ)} \leq 0{,}2512) = 0{,}95.$$

Untersucht man hingegen den partiellen Zusammenhang zwischen den Merkmalen I, J und K, so ist die entsprechende Prüfgröße definiert als[1]:

$$\lambda_{j(IJ/K)} = \frac{\sum_{k=1}^{\ell} \sum_{i=1}^{r} \underset{j}{\text{Max}}(n_{ijk}) - \sum_{k=1}^{\ell} \underset{j}{\text{Max}}(n_{.jk})}{n - \sum_{k=1}^{\ell} \underset{j}{\text{Max}}(n_{.jk})} \qquad (4.4.3\text{-}15)$$

und analog für die anderen denkbaren partiellen Zusammenhänge. Dieser Koeffizient mißt die relative Verminderung der Fehlerwahrscheinlichkeit von dem Zustand, in dem man die J-Ausprägung eines Objektes in Kenntnis seiner I-Ausprägung und seiner K-Ausprägung schätzt, im Vergleich zu dem Zustand, wenn man die J-Ausprägung nur in Kenntnis der K-Ausprägung schätzt. Diese Definition einer partiellen Betrachtungsweise unterscheidet sich fundamental von der bisher angewandten. Hier wird keine bestimmte Ausprägung des Merkmals K vorgegeben, sondern es wird nur allgemein angenommen, daß die Ausprägung von K bekannt sei. Ermittelt man die partiellen λ-Koeffizienten für das Modellbeispiel I[2], so erhält man :

$$\lambda_{j(IJ/K)} = 0{,}0256 \qquad \lambda_{i(IJ/K)} = 0$$

$$\lambda_{k(IK/J)} = 0{,}0256 \qquad \lambda_{i(IK/J)} = 0$$

$$\lambda_{k(JK/I)} = 0{,}1163 \qquad \lambda_{j(JK/I)} = 0{,}0500$$

Soll von der Größe eines partiellen λ-Kontingenzkoeffizienten auf die Größe des unbekannten Λ-Koeffi-

1 Vgl.: GOODMAN, L. A. und KRUSKAL, W. H.: Measures of association ... , a.a.O., S. 760 ff. .

2 Vgl. die Erläuterungen zu Modellbeispiel I auf S. 24 ff. .

zienten der Grundgesamtheit geschlossen werden, ist unter den oben angegebenen Voraussetzungen eine Intervallschätzung möglich mit dem Konfidenzintervall

$$W(\lambda_{j(IJ/K)} - z \cdot s_{j(IJ/K)} \leq \Lambda_{j(IJ/K)} \leq \lambda_{j(IJ/K)} + z \cdot s_{j(IJ/K)}) = 1-\alpha$$

(4.4.3-16),

wobei der Standardfehler $s_{j(IJ/K)}$ definiert ist als[1] :

$$s_{j(IJ/K)} = \sqrt{\frac{\left[n - \sum_{ki} \underbrace{\text{Max}(n_{ijk})}_{j}\right] \cdot \left[\sum_{ki} \underbrace{\text{Max}(n_{ijk})}_{j} + \sum_{k} \underbrace{\text{Max}(n_{.jk})}_{j} - 2 \sum_{i}^{r} \underbrace{\text{Max}(n_{ijk})}_{j}\right]}{\left(n - \sum_{k} \underbrace{\text{Max}(n_{.jk})}_{j}\right)^3}}$$

(4.4.3-17).

In diesem Ausdruck kennzeichnet

$$\sum_{i}^{r} \underbrace{\text{Max}(n_{ijk})}_{j}$$

bei vorgegebenem k die Summe aller $\underbrace{\text{Max}(n_{ijk})}_{j}$, die aus den Spalten stammen, für die $\underbrace{\text{Max}(n_{.jk})}_{j}$ gilt.

Verdeutlicht man sich dies anhand von Beispiel 1[2], so zeigt sich :

K / J / I	K_1		K_2	
	J_1	J_2	J_1	J_2
I_1	80	90†	70	80†
I_2	150†	130	100	300†
$\sum$	230×	220	170	380×

Die mit einem † gekennzeichneten Häufigkeiten sind

1 Vgl.: GOODMAN, L. A. und KRUSKAL, W. H.: Measures of association ... III, a.a.O., S. 333 ff. .

2 Vgl. die Erläuterungen zu Modellbeispiel 1 auf S. 24 ff. .

die jeweiligen $\underset{j}{\overbrace{Max(n_{ijk})}}$, die mit einem × gekennzeichneten Häufigkeiten sind die $\underset{j}{\overbrace{Max(n_{.jk})}}$.

Es ergibt sich also

$$\sum_{ki}\sum^{r} \underset{j}{\overbrace{Max(n_{ijk})}} = 150+80+300=530$$

Aus der Berechnung des Standardfehlers $s_{j(IJ/K)}$ erhält man dann :

$$s_{j(IJ/K)}=\sqrt{\frac{(1.000-620)\cdot(620+610-2\cdot530)}{(1.000-610)^3}} = 0,033$$

Damit ergibt sich ein Konfidenzintervall

$$W(0,0256-1,96\cdot0,033\leq \Lambda_{j(IJ/K)}\leq 0,0256+1,96\cdot0,033)=0,95$$

$$W(0,0000\leq \Lambda_{j(IJ/K)}\leq 0,0903) = 0,95,$$

wenn man die Tatsache berücksichtigt, daß negative partielle Kontingenzkoeffizienten nicht definiert sind.

Aus der sich hier eigentlich ergebenden Überschreitung des für den Kontingenzkoeffizienten definierten Gültigkeitsbereiches zeigt sich für das vorliegende Beispiel, daß die Verteilung der $\lambda_{j(IJ/K)}$ keiner Normalverteilung folgt. Die Approximation der Verteilung der $\lambda_{j(IJ/K)}$ durch eine Standardnormalverteilung wird aber um so besser, je größer die Zahl der Ausprägungen jedes Merkmals wird. Trotzdem erscheint wegen der aufgezeigten möglichen Beschränkung der Approximation Vorsicht geboten bei der Durchführung von Intervallschätzungen.

Da Zusammenhangsmaße zudem in den meisten Fällen mehr deskriptiven Charakter haben, während die

Signifikanz von Abhängigkeiten mit den oben erläuterten Testverfahren geprüft werden kann, ist es fraglich, ob den Intervallschätzungen für Kontingenzkoeffizienten sehr große Bedeutung beizumessen ist. Da somit die Aussagekraft dieser auf optimaler Vorhersage basierenden Koeffizienten keinen grundlegenden Vorteil gegenüber den oben dargestellten Koeffizienten KC und KI bieten, soll auf sie im folgenden nicht weiter eingegangen werden.

4.5 Anwendungsbeispiele für die Bestimmung einfacher Zusammenhänge zwischen nominalskalierten Merkmalen

4.5.1 Vorbemerkungen

Wie in der Einleitung bereits angedeutet, ist das primäre Ziel dieser Arbeit die Darstellung der Untersuchungsmethoden zur Bestimmung und Beurteilung mehrdimensionaler Zusammenhänge zwischen nominalskalierten Daten.

Aus diesem Grunde richtete der Verfasser bisher sein Hauptaugenmerk nicht auf die umfassende Analyse mehrdimensionaler Kontingenztabellen mit empirischem Datenmaterial. Die Beschaffung, Aufbereitung, Analyse und Interpretation solcher Daten müßten bei der notwendigen wissenschaftlichen Sorgfalt einen zu breiten Raum im Rahmen dieser Arbeit einnehmen.

Die dargestellten und noch darzustellenden Untersuchungsmethoden sollen daher nur in diesem Abschnitt und in Abschnitt 5.5 anhand von zwei kleinen

empirischen Beispielen im Zusammenhang aller möglichen Analyseverfahren verdeutlicht werden. Diese Beispiele können, da sie nur Ausschnitte aus umfassenden empirischen Untersuchungen sind, für sich allein nur mit Vorbehalten sachlich interpretiert werden. Aus diesem Grunde sollan nachfolgend nicht alle Aspekte der Analyse durchleuchtet werden.

4.5.2 Die Bestimmung von Zusammenhängen zwischen dem Herkunftsland, der gewählten Studienrichtung und dem gewählten Studienort in Nordrhein-Westfalen von deutschen Studienanfängern im Wintersemester 1970/71

Vor der Darstellung des der Analyse zugrundeliegenden Zahlenmaterials sollen einige Vorbemerkungen den Untersuchungsgegenstand abgrenzen.

Objekte der Untersuchung sind deutsche Studienanfänger, die im Wintersemester 1970/71 das Studium an nordrhein-westfälischen Universitäten durchgeführt haben. Hierbei sollen unter Studienanfängern Studenten der 1. und 2. Hochschulsemester verstanden werden, da die vorliegenden Daten nur für Abiturienten j a h r g ä n g e vom statistischen Landesamt Nordrhein-Westfalen erhoben wurden[1)].

Zum anderen wurden die neugegründeten Universitäten Bielefeld und Dortmund sowie die Technische Hochschule Aachen und einige spezielle fachbezogene Hochschulen nicht untersucht, da das Lehrangebot

1 Zur sachlichen Interpretation der sich hierbei ergebenden Problematik vgl.: BECKMANN, J.: Gravitationstheoretischer Ansatz zur Ermittlung des regionalen Studentenaufkommens in Nordrhein-Westfalen, Hannover-München 1973, S. 5f. u. S. 8.

dieser Hochschulen wegen der Neugründung beziehungsweise wegen der fachlichen Ausrichtung von dem der untersuchten Universitäten abweicht.

Für die 11.213 Studienanfänger des Wintersemesters 1970/71 ergab sich die in Tabelle 21 wiedergegebene Verteilung auf die einzelnen Merkmalsausprägungen.

Analysiert man die in diesen Daten zwischen den Merkmalen bestehenden Zusammenhänge, gelangt man zu folgenden Ergebnissen :

1. Zwischen den Merkmalen "gewählte Studienfachrichtung","besuchte Universität" und "Herkunftsland" der untersuchten Studenten besteht eine signifikante totale Abhängigkeit. Es ergeben sich hier die folgenden Werte der Prüfgrößen :

$$\left.\begin{aligned} \chi^2_{total} &= 4.343{,}776 \\ 2\hat{I}_{total} &= 3.162{,}770 \end{aligned}\right\} \text{bei } \nu = 374 \text{ Freiheitsgraden}$$

Überprüft man im Falle des χ^2-Tests die Signifikanz mit Hilfe der in Unterabschnitt 4.2.1 dargestellten Approximationsbeziehung zwischen der χ^2-Verteilung und einer Normalverteilung, so ergibt sich ein Wert der standardnormalverteilten Prüfgröße z von

$$z = 51{,}905 \ .$$

Das Ergebnis dieses Tests auf totale Unabhängigkeit kann bei dem vorliegenden Untersuchungsumfang kaum überraschen. Bereinigt man jedoch die χ^2-Prüfgröße um den Untersuchungsumfang durch Ermittlung des Kontingenzkoeffizienten,

Tab. 21 : Deutsche Studienanfänger an den Universitäten Nordrhein-Westfalens im Wintersemester 1970/71, aufgeteilt nach Herkunftsland, Studienfachrichtung und besuchter Universität[1)]

Herkunftsland der Studenten (Merkmal I)	Besuchte Universität in NRW (Merkmal J)	Gewähltes Studienfach (Merkmal K)									Σ
		Theologie	Medizin	Pharmazie	Rechtswiss.	Wirtschaftswissensch.	Sozialwiss.	Geisteswiss.	Sprachwiss.	Mathematik u. Naturwiss.	
Schleswig-Holstein	Bochum	0	1	0	0	3	0	1	1	2	8
	Bonn	0	3	3	3	1	0	1	2	0	13
	Köln	0	6	0	0	3	0	0	0	2	11
	Münster	1	2	0	1	2	0	2	1	1	10
Hamburg	Bochum	0	1	0	0	1	0	0	1	0	3
	Bonn	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
	Köln	0	0	0	1	1	0	0	4	1	7
	Münster	2	0	0	0	0	0	2	0	0	4
Niedersachsen	Bochum	1	4	0	6	9	1	10	5	13	49
	Bonn	0	10	11	13	6	2	3	9	12	66
	Köln	0	18	0	9	10	5	7	8	6	63
	Münster	22	29	10	65	61	4	41	141	95	468
Bremen	Bochum	1	0	0	0	1	0	1	1	1	5
	Bonn	0	1	1	2	0	0	0	0	3	7
	Köln	0	5	0	1	1	0	2	1	3	13
	Münster	3	6	0	4	8	0	6	3	6	36
Nordrhein-Westfalen	Bochum	66	69	0	397	390	135	345	534	816	2752
	Bonn	95	85	94	352	175	39	186	403	644	2073
	Köln	2	143	0	476	438	56	258	526	533	2432
	Münster	85	138	100	232	376	21	215	628	572	2367
Hessen	Bochum	0	4	0	0	1	2	8	1	2	18
	Bonn	0	5	13	0	0	0	2	6	8	34
	Köln	0	21	0	6	4	0	2	3	9	45
	Münster	0	7	2	2	1	0	2	3	2	19
Rheinland-Pfalz	Bochum	0	3	0	1	4	1	2	0	9	20
	Bonn	4	15	9	49	3	10	21	96	144	351
	Köln	0	15	0	11	30	1	4	15	28	104
	Münster	1	0	1	1	1	0	5	0	5	14
Baden-Württemberg	Bochum	0	7	0	0	2	0	4	1	4	18
	Bonn	0	5	6	4	3	1	3	4	9	35
	Köln	0	23	0	3	8	0	1	1	6	42
	Münster	2	7	1	1	2	0	3	0	3	19
Bayern	Bochum	0	4	0	1	0	0	1	0	1	7
	Bonn	1	13	1	1	1	1	1	1	4	24
	Köln	0	10	0	1	0	0	1	0	2	14
	Münster	0	2	0	3	2	0	3	1	2	13
Saarland	Bochum	0	0	0	0	1	0	1	0	0	2
	Bonn	0	2	0	0	0	1	1	2	5	11
	Köln	0	1	0	0	0	0	1	2	0	4
	Münster	0	0	0	0	1	0	1	0	3	5
West-Berlin	Bochum	0	0	0	2	3	1	1	0	1	8
	Bonn	0	1	0	1	1	0	0	1	1	5
	Köln	0	1	0	1	1	1	3	0	2	9
	Münster	0	0	0	0	1	0	1	1	1	4
Σ		286	668	252	1650	1556	282	1152	2406	2961	11213

1 Quelle : Unveröffentlichte Aufbereitung der deutschen Studentenzahlen im 1. und 2. Hochschulsemester nach ständigem Wohnsitz, Studiengebiet und Universität in NRW für das Wintersemester 1970/71, durchgeführt im statistischen Landesamt NRW, Fachserie A-12 .

so erhält man :

$$KC_{total} = 0{,}528 \ .$$

Dieses Ergebnis deutet darauf hin, daß der Zusammenhang auch unabhängig vom Untersuchungsumfang relativ hoch ist. Ebenso zeigen die informationstheoretischen Kontingenzkoeffizienten mit

$$KI_{total/I} = 0{,}111$$
$$KI_{total/J} = 0{,}051$$
$$KI_{total/K} = 0{,}037$$

an, daß sich alle Merkmale gegenseitig beeinflussen. Allerdings ist die Größe der beiden Arten von Koeffizienten wegen der unterschiedlichen Definition nicht vergleichbar. Aus der Größe der informationstheoretischen Kontingenzkoeffizienten läßt sich lediglich schließen, daß die Unsicherheit über die Verteilung der Studienanfänger auf die Herkunftsländer durch die Hinzunahme der beiden anderen Merkmale deutlicher vermindert wird, als in den beiden anderen Betrachtungsweisen.

2. Bei der Untersuchung der multiplen Zusammenhänge zeigen sich die folgenden Ergebnisse : Zwischen dem Herkunftsland der Studenten einerseits und den beiden weiteren Merkmalen andrerseits besteht ein multipler Zusammenhang, nachgewiesen durch

$$\chi^2_{I(JK)} = 3.003{,}761$$
$$2\hat{I}_{I(JK)} = 2.118{,}326.$$

Auch hier liegt bei jeweils $\nu = 344$ Freiheitsgraden deutliche Signifikanz der Ergebnisse vor; man erhält für den χ^2-Test einen Wert der standardnormalverteilten Prüfgröße von $z = 41{,}542$.

Der korrigierte Kontingenzkoeffizient zeigt hier mit

$$KC_{korr_{I(JK)}} = 0,482$$

ebenfalls detulich den multiplen Zusammenhang zwischen den Merkmalen I und (JK) auf. Die informationstheoretischen Kontingenzkoeffizienten deuten augenscheinlicher auf die Richtung der Beeinflussung hin. Da

$$KI_{I(\underline{JK})} = 0,148$$

und

$$KI_{\underline{I}(JK)} = 0,029$$

kann gefolgert werden, daß die Unsicherheit über die Verteilung der Studienanfänger auf Fachrichtung und Universität durch die Kenntnis des Herkunftslandes abnimmt. Auf der anderen Seite vermittelt die gemeinsame Kenntnis von gewältem Studienfach und besuchter Universität kaum Informationen über das Herkunftsland der Studenten. Vergleicht man dieses Ergebnis mit dem unter 1. abgeleiteten Resultat, so ergibt sich, daß in der jeweiligen Verteilung der Studenten auf die Merkmale "besuchte Universität" und "gewählte Fachrichtung" ein großer Teil Information über die Herkunft der Studenten enthalten sein muß, die bei der gemeinsamen Betrachtung der beiden Merkmale in der multiplen Analyse verlorengeht. Auch die anderen multiplen Interdependenzen werden deutlich durch

$$\left.\begin{aligned} \chi^2_{J(IK)} &= 2.789,287 \\ 2\hat{I}_{J(IK)} &= 2.601,674 \end{aligned}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{bei } \nu = 294 \\ \text{Freiheits-} \\ \text{graden} \end{array}$$

für den Zusammenhang zwischen gewählter Univer-

sität einerseits und der Studienfachrichtung und dem Herkunftsland andrerseits, und mit

$$\left.\begin{aligned} \chi^2_{K(IJ)} &= 2.398,836 \\ 2\hat{I}_{K(IJ)} &= 1.779,836 \end{aligned}\right\} \text{ bei } \nu = 350 \text{ Freiheitsgraden}$$

für den Zusammenhang zwischen der gewählten Fachrichtung einerseits und besuchter Universität und Herkunftsland andrerseits. Hier lassen die informationstheoretischen Kontingenzkoeffizienten[1] keinen Schluß über die Richtung der Beeinflussung zu

3. Überprüft man den unbedingten Zusammenhang zwischen jeweils zwei Merkmalen, so stellt sich heraus, daß zwischen der Herkunft der Studenten und der gewählten Universität der Zusammenhang besonders augenfällig ist, denn man erhält

$$\left.\begin{aligned} \chi^2_{IJ} &= 1.555,774 \\ 2\hat{I}_{IJ} &= 1.382,934 \end{aligned}\right\} \text{ bei } \nu = 30 \text{ Freiheitsgraden}$$

und

$$KC_{korr_{IJ}} = 0,403$$

$$KI_{I\underline{J}} = 0,097$$

$$KI_{\underline{I}J} = 0,045 .$$

Diese Ergebnisse bestätigen die Hypothese, daß bei Studienanfängern das Herkunftsland die Wahl der Universität maßgeblich beeinflußt, und zwar in dem Sinne, daß die Studenten die regional am nächsten am nächsten gelegene Universität präferieren[2]. Die beiden weiteren unbedingten Zweifachkombinationen von Merkmalen weisen ebenfalls signifikante Zusammenhänge auf, wenn auch von vergleichsweise schwächerer Aus-

---

1 Man erhält hier : $KI_{J(IK)}$=0,0485, $KI_{J(\underline{IK})}$=0,0884, $KI_{K(IJ)}$=0,0437, $KI_{K(\underline{IJ})}$=0,0449

2 Vgl. BECKMANN, J.: a.a.O., S. 117

prägung.

4. Bei der Untersuchung der partiellen Zxsammenhänge gestaltet sich die Analyse insofern schwierig, als sich infolge der vorliegenden Daten des öfteren Randsummen = 0 ergeben, sodaß die entsprechenden Unabhängigkeitsprüfgrößen nicht definiert sind. In diesem Fall können Klassen von Merkmalen zusammengefaßt werden, soweit dies sachlich sinnvoll erscheint. Bei der Einzeluntersuchung der partiellen Zusammenhänge fallen die folgenden Ergebnisse ins Auge : Bei der Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Herkunftsland der Studienanfänger und der von ihnen besuchten Universität bei vorgegebenem Studienfach führt bei den Studenten im Fach Sozialwissenschaften der χ^2-Test zur Ablehnung der Nullhypothese, während der $2\hat{I}$-Test keine Ablehnung der Nullhypothese rechtfertigt :

$$\left.\begin{aligned} \chi^2_{IJ/K_6} &= 64{,}920 \\ 2\hat{I}_{IJ/K_6} &= 26{,}662 \end{aligned}\right\} \text{bei } \chi^2_{c(30;0{,}05)} = 43{,}77 \ .$$

Dieses unterschiedliche Ergebnis kommt zustande durch die Nullfelderkorrektur beim $2\hat{I}$-Test[1)], denn ohne diese Korrektur ergibt sich

$$2\hat{I}_{IJ/K_6} = 53{,}662 \ .$$

Da hier 27 Nullfelder bei der Korrektur zu berücksichtigen sind, erscheint auch beim χ^2-Test Vorsicht geboten in der Ablehnung der Nullhypothese, denn auch beim χ^2-Test verzerren die Nullfelder die Approximation der beobachteten Verteilung durch eine χ^2-Verteilung.

---

1 Vgl. die entsprechenden Ausführungen zur Nullfelderkorrektur auf S. 88

Faßt man bei den Studienanfängern im Fach Pharmazie die Merkmale wie in Tab. 22 zusammen, so besteht bei den Studienanfängern dieser Fachrichtung ein Zusammenhang zwischen Herkunftsland und besuchter Universität, denn

$$\left.\begin{aligned} \chi^2_{IJ/K_3} &= 18{,}030 \\ 2\hat{I}_{IJ/K_3} &= 20{,}341 \end{aligned}\right\} \text{bei } \chi^2_{c(4;0{,}05)} = 9{,}49.$$

Diese Abhängigkeit ist aber primär auf den Einfluß der Studienanfänger aus Nordrhein-Westfalen zurückzuführen, denn wenn diese aus der Analyse ausgeklammert werden, zeigt sich mit

$$\left.\begin{aligned} \chi^2_{IJ/K_3} &= 6{,}075 \\ 2\hat{I}_{IJ/K_3} &= 6{,}148 \end{aligned}\right\} \text{bei } \chi^2_{c(3;0{,}05)} = 7{,}82,$$

daß die Hypothese der Unabhängigkeit zwischen Herkunftsland und besuchter Universität nicht abgelehnt werden kann. Dies erklärt sich daraus, daß für das Studium der Pharmazie an allen Universitäten der Bundesrepublik Zulassungsbeschränkungen herrschen. Da zudem das Studium der Pharmazie nicht an allen Universitäten möglich ist, können Studienbewerber in diesem Fach nicht damit rechnen, an einer Universität ihrer Wahl in ihrer Nähe zu studieren.

Tab. 22 : Deutsche Studienanfänger im Fach Pharmazie nach Herkunftsländern und besuchter Universität in NRW

Herkunftsland \ Universität	Bonn	Münster
Schleswig-Holstein, Hamburg, Niedersachsen, Bremen	15	10
Nordrhein-Westfalen	94	100
Hessen	13	2
Rheinland-Pfalz	9	1
Baden-Württemberg, Bayern, Saarland, West-Berlin	7	1

Bis auf die Studienbewerber im Fach Theologie, wo wegen verschiedener Randsummen = 0 die Prüfgrößen nicht definiert sind, ergibt sich bei der Untersuchung in allen anderen Studienfächern, daß sich Herkunftsland und Studienort beeinflussen. Dieser Zusammenhang ist am stärksten bei den Studenten der Sprachwissenschaften mit $KC_{korr} = 0,500$. Allerdings dürfte auch hier die Stärke des Zusammenhangs primär auf die Studenten aus Nordrhein-Westfalen zurückzuführen sein.

Untersucht man die partiellen Zusammenhänge zwischen Herkunftsland und gewähltem Studienfach bei den verschiedenen Universitäten, so stellt man, teilweise nach entsprechender Zusammenfassung von Merkmalsklassen, in allen Fällen signifikante Zusammenhänge fest.

Bei der Überprüfung der Beziehungen zwischen besuchter Universität und gewähltem Studienfach bei den Studienanfängern der einzelnen Bundesländer ergeben sich unterschiedliche Ergebnisse. Bei den Studenten aus Schleswig-Holstein, Hamburg, Saarland und Westberlin ist der Untersuchungsumfang jeweils kleiner als n = 50. Daher sind irgendwelche Aussagen über die Zusammenhänge zwischen besuchter Hochschule und gewählter Fachrichtung nicht möglich.

Bei den Studienanfängern aus Bayern und Bremen, wobei bei letzteren Merkmalsklassen zusammengefaßt werden müssen, ist von der Hypothese auszugehen, daß sich Studienfach und besuchte Universität nicht beeinflussen. Hier ist der Untersuchungsumfang groß genug, um die Ergebnisse gesichert erscheinen zu lassen.

Da man allgemein davon ausgehen kann, daß sich potentielle Studienanfänger zunächst für ihr Studienfach entscheiden und sich danach eine für dieses Studienfach relevante Universität aussuchen, gilt für die Studienanfänger aus Bayern und Bremen im untersuchten Wintersemester 1970/71, daß bei ihnen bei gewähltem Studienfach keine besonderen Präferenzen für einzelne Universitäten in Nordrhein-Westfalen festzustellen sind.

Bei den Studienanfängern aus allen anderen Bundesländern beeinflußt die Wahl des Studienfachs auch die Wahl der Universität. Besonders deutlich wird dies bei den Studienanfängern aus den nichtnordrhein-westfälischen Ländern. So ergibt sich beispielsweise nach entsprechender Zusammenfassung der Merkmalsklassen für den Zusammenhang zwischen der Wahl des Studienfachs und der Wahl der Universität bei den Studienanfängern aus Hessen ein $KC_{korr} = 0{,}723$ und für die Studienanfänger aus Baden-Württemberg von $KC_{korr} = 0{,}541$.

Eine Erklärung hierfür läßt sich aus der räumlichen Entfernung des Heimatortes dieser Studienanfänger von ihrem Hochschulort ableiten. Wenn Studenten nicht die näher gelegenen und für sie auch finanziell günstigeren Universitäten ihrer Heimatländer besuchen wollen, man denke zum Beispiel an die Befreiung von den Studiengebühren, so müssen die von ihnen ausgewählten Universitäten in ihrem angestrebten Studienfach bestimmte Vorteile zu bieten haben. Diese Erklärung dürfte vor allem für die Studienanfänger aus Niedersachsen und Rheinland-Pfalz zutreffen. Für die Studenten aus Hessen und Baden-Württemberg scheint

die Wahl der Universität in Nordrhein-Westfalen bei Berücksichtigung des Studienfachs mehr daraus zu erklären zu sein, daß diese Studenten wegen eines mit dem Numerus-Clausus belegten Studienfachs von der zentralen Registrierstelle den nordrhein-westfälischen Universitäten zugewiesen wurden. Dies ergibt sich aus der Verteilung der Studienanfänger dieser Bundesländer auf die einzelnen Studienfächer.

Bei den Studenten aus Nordrhein-Westfalen schließlich, die ihr Studium im Wintersemester 1970/71 an den genannten vier Universitäten aufgenommen haben, bestand ebenfalls eine Abhängigkeit zwischen gewähltem Studienfach und besuchter Universität. Allerdings ist dieser Zusammenhang nicht so stark ausgeprägt, wie bei den Studienanfängern aus Niedersachsen, Hessen, Rheinland-Pfalz und Baden-Württemberg.

4.5.3 Die Bestimmung von Zusammenhängen zwischen der verwaltungsmäßigen Gliederung, dem Bruttoinlandsprodukt und der Anzahl von Gymnasiasten pro 1.000 der Bevölkerung für die 90 Kreise Nordrhein-Westfalens

Ein Aspekt der Regionalplanung erbringt die Grundlage für das zweite Demonstrationsbeispiel. Es ist sicherlich von Interesse, die gegenseitige Beeinflussung von verwaltungstechnischer Gliederung, Bruttoinlandsprodukt und Bildungsfreudigkeit in den Kreisen Nordrhein-Westfalens zu untersuchen. Die Merkmale wurden so gewählt, daß sie auf unterschiedlichen Skalenniveaus gemessen werden. So ist als

Indikator für die Bildungsfreudigkeit der einzelnen Kreise die Zahl der Gymnasiasten pro 1.000 der Bevölkerung[1] verhältnisskaliert, der Index der Bruttoinlandsprodukte in den Kreisen ist intervallskaliert, während die verwaltungsmäßige Gliederung nominalskaliert ist. Durch die Restriktion, die das letzte Merkmal auf die Analyse ausübt, können nur die Untersuchungsverfahren zur Anwendung gelangen, die für nominalskalierte Daten zulässig sind.

Der Analyse liegen die in Tab. 23 wiedergegebenen Daten zugrunde. Aus der Unabhängigkeitsanalyse dieser Daten ergeben sich die folgenden Resultate :

1. Zwischen den drei Untersuchungsmerkmalen besteht ein totaler Zusammenhang, da

$$\left.\begin{aligned} \chi^2_{total} &= 94{,}712 \\ 2\hat{I}_{total} &= 58{,}433 \end{aligned}\right\} \text{bei } \chi^2_{c(24;0{,}05)} = 36{,}42 \ .$$

Die Betrachtung der Kontingenzkoeffizienten

$$KC_{total} = 0{,}716$$
$$KI_{total/\underline{I}} = 0{,}245$$
$$KI_{total/\underline{J}} = 0{,}148$$
$$KI_{total/\underline{K}} = 0{,}128$$

zeigt, daß die Stärke des Zusammenhangs recht groß ist.

2. Bei der Untersuchung der multiplen Abhängigkeiten ergibt sich, daß zwischen den untersuchten Merkmalen nicht in allen Richtungen signifikante Zusammenhänge bestehen. Besonders stark ausgeprägt

---

1 Auf die Problematik der Beeinflussung dieses Indikators durch unterschiedlich hohe Anteile von Kindern und Jugendlichen an der Gesamtbevölkerung in den einzelnen Kreisen soll nicht näher eingegangen werden.

Tab. 23 : Aufgliederung der 90 Kreise Nordrhein-Westfalens nach verwaltungsmäßiger Gliederung, Bruttoinlandsproduktindex und Anzahl der Gymnasiasten pro 1.000 der Bevölkerung[1] für das Jahr 1971

Verwaltungsmäßige Gliederung	Bruttoinlandsproduktindex \ Zahl der Gymnasiasten pro 1.000 der Bevölkerung	< 20	20 - 24,9	25 - 29,9	≥ 30
Stadtkreise	< 90	1	5	3	0
	90 - 109	3	5	0	2
	110 - 129	0	3	2	5
	≥130	0	2	3	0
Landkreise	< 90	14	18	11	1
	90 - 109	3	4	1	0
	110 - 129	2	0	1	0
	≥130	1	0	0	0

ist die Abhängigkeit zwischen verwaltungsmäßiger Gliederung einerseits und Bildungsfreudigkeit/ Bruttoinlandsproduktindex andrerseits mit

$$KC_{I(JK)} = 0,789$$

1 Quellen : Merkmale "Verwaltungsmäßige Gliederung" und "Anzahl der Gymnasiasten pro 1.000 der Bevölkerung": Statistisches Landesamt NRW : Angaben für kreisfreie Städte und Kreise des Landes NRW, Kreisstandardzahlen 1971, Düsseldorf 1971, S. 6 ff.; Merkmal "Bruttoinlandsproduktindex": Statistisches Landesamt NRW: Angaben für kreisfreie Städte und Kreise des Landes NRW, Kreisstandardzahlen 1972, Düsseldorf 1972, S. 350 ff. .

$$KI_{\underline{I}(JK)} = 0{,}317$$
$$KI_{I(\underline{JK})} = 0{,}093 .$$

Aus der unterschiedlichen Größe der informationstheoretischen Kontingenzkoeffizienten läßt sich schließen, daß die gemeinsame Information über die verwaltungsmäßige Gliederung und die Bildungsfreudigkeit/den Bruttoinlandsproduktindex maßgeblicher von der Information über die verwaltungsmäßige Gliederung beeinflußt wird, als von der Information über den anderen Merkmalskomplex.

Auch zwischen dem Bruttoinlandsproduktindex einerseits und der verwaltungsmäßigen Gliederung/Bildungsfreudigkeit andrerseits besteht ein signifikanter Zusammenhang, wenngleich auch von schwächerer Ausprägung.

Im Falle der Analyse des Zusammenhangs zwischen der Bildungsfreudigkeit und der verwaltungstechnischen Gliederung/dem Bruttoinlandsproduktindex führt der χ^2-Test im Gegensatz zum $2\hat{I}$-Test zur Ablehnung der Nullhypothese von der Unabhängigkeit, denn

$$\left.\begin{aligned} \chi^2_{K(IJ)} &= 43{,}559 \\ 2\hat{I}_{K(IJ)} &= 31{,}573 \end{aligned}\right\} \text{bei } \chi^2_{c(21;0{,}05)} = 32{,}67.$$

Da dieses unterschiedliche Ergebnis wiederum auf die Nullfelderkorrektur beim $2\hat{I}$-Test zurückzuführen ist, sollte hier insgesamt die Unabhängigkeitshypothese nicht verworfen werden, da die hohe Zahl der Nullfelder auch das Ergebnis des χ^2-Tests verzerrt.

3. Betrachtet man die Merkmale jeweils unbedingt paarweise, so zeigen sich in allen Fällen signifikante Zusammenhänge. Alle Merkmale beeinflussen sich paarweise gegenseitig.

4. Infolge des relativ geringen Untersuchungsumfangs von n = 90 Kreisen kann die Untersuchung der partiellen Zusammenhänge kaum zu nennenswerten Aufschlüssen führen, da in den meisten Einzelbetrachtungen der Untersuchungsumfang n < 50 ist.

   Lediglich die Untersuchung des partiellen Zusammenhangs zwischen Bildungsfreudigkeit und Bruttoinlandsproduktindex bei Landkreisen und desjenigen zwischen verwaltungsmäßiger Gliederung und Bildungsfreudigkeit bei einem Bruttoinlandsproduktindex <90 weisen ausreichend große Untersuchungsumfänge auf. In beiden Fällen muß jedoch aufgrund der Testergebnisse von Unabhängigkeit zwischen den jeweiligen Merkmalen ausgegangen werden.

5 DIE PRÜFUNG VON ZUSAMMENHÄNGEN HÖHERER ORDNUNG ZWISCHEN DREI NOMINALSKALIERTEN MERKMALEN

5.1 Das Grundmodell zur Prüfung des Zusammenhangs höherer Ordnung zwischen nominalskalierten Merkmalen

BARTLETT hat mit seiner richtungweisenden Veröffentlichung[1] im Jahre 1935 den Grundstein für die weitergehende Analyse mehrdimensionaler Kontingenztafeln gelegt. Er beruft sich dabei[2] auf eine Anregung von FISHER.

Das Grundmodell zur Prüfung der Unabhängigkeit höherer Ordnung soll anhand eines 2 × 2 × 2 -Kontingenzwürfels erläutert werden, wie er in Abb. 15 wiedergegeben ist.

Im Rahmen der Prüfung der Hypothese der Unabhängigkeit höherer Ordnung betrachtet man jeweils zwei parallele Ebenen dieses Kontingenzwürfels, wie in Abb. 16 veranschaulicht.

Untersucht man nun beispielsweise die Ebenen K_1 und K_2, so gelten dort jeweils die folgenden Unabhängigkeitsbedingungen :

$$p_{111} = p_{1.1} \cdot p_{.11} \quad (5.1\text{-}1) \qquad p_{121} = p_{1.1} \cdot p_{.21} \quad (5.1\text{-}2)$$

$$p_{211} = p_{2.1} \cdot p_{.11} \quad (5.1\text{-}3) \qquad p_{221} = p_{2.1} \cdot p_{.21} \quad (5.1\text{-}4)$$

beziehungsweise

$$p_{112} = p_{1.2} \cdot p_{.12} \quad (5.1\text{-}5) \qquad p_{122} = p_{1.2} \cdot p_{.22} \quad (5.1\text{-}6)$$

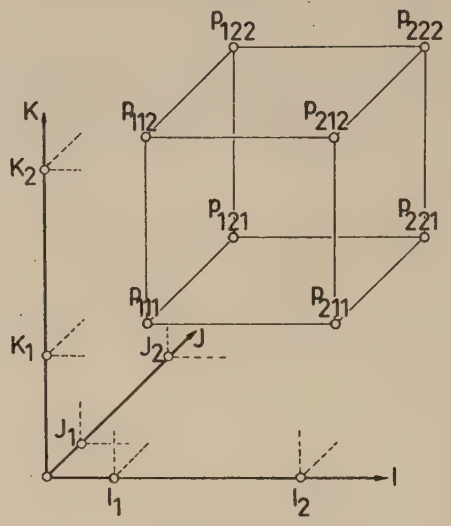
$$p_{212} = p_{2.2} \cdot p_{.12} \quad (5.1\text{-}7) \qquad p_{222} = p_{2.2} \cdot p_{.22} \quad (5.1\text{-}8)$$

---

1 Vgl.: BARTLETT, M. S.: a.a.O., S. 248 ff. .

2 Vgl.: BARTLETT, M. S.: a.a.O., S. 249.

Abb. 15 : Allgemeiner 2 × 2 × 2 -Kontingenzwürfel mit Angabe der relativen Beobachtungshäufigkeiten p_{ijk}



Im Falle der Unabhängigkeit zwischen den Merkmalen I und J in der Ebene K_1 muß dann gelten :

$$p_{111} \cdot p_{221} = p_{121} \cdot p_{211} \qquad (5.1\text{-}9) \ .$$

Diese Unabhängigkeitsbedingung läßt sich durch Einsetzen der Gleichungen (5.1-1) bis (5.1-4) in (5.1-9) leicht beweisen. Die Gleichung (5.1-9) bezeichnet man als das K r e u z p r o d u k t der Ebene K_1, das sich auch formulieren läßt als

$$\frac{p_{111} \cdot p_{221}}{p_{121} \cdot p_{211}} = 1 \qquad (5.1\text{-}10) \ .$$

Analog kann man für die Ebene K_2 die Unabhängigkeits-

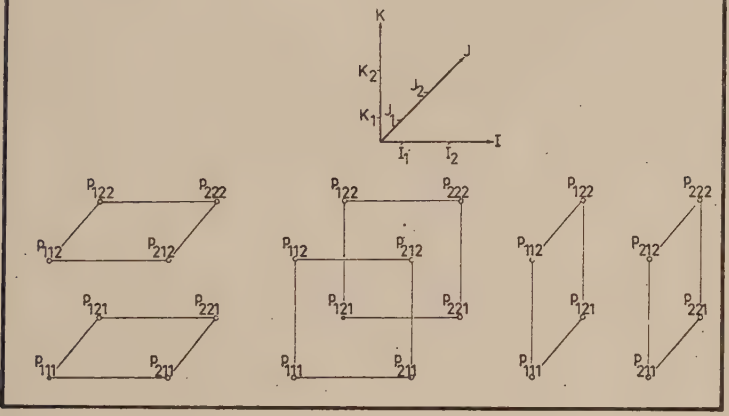
bedingungen formulieren als

$$p_{112} \cdot p_{222} = p_{122} \cdot p_{212} \qquad (5.1\text{-}11)$$

beziehungsweise

$$\frac{p_{112} \cdot p_{222}}{p_{122} \cdot p_{212}} = 1 \qquad (5.1\text{-}12) \ .$$

Abb. 16 : Die parallelen Ebenen des Kontingenzwürfels aus Abb. 15



Wird das Kreuzprodukt einer Ebene <1 oder >1, liegt Abhängigkeit vor zwischen den beiden Merkmalen, die die Ebene bilden.

Wie oben definiert, liegt Unabhängigkeit höherer Ordnung dann vor, wenn das dritte Merkmal keinen Einfluß auf die Beziehungen zwischen den beiden anderen Merkmalen ausübt. Das bedeutet, daß die Stärke der Abhängigkeit in den beiden Ebenen des Kontingenzwürfels gleich sein muß. Ist diese Be-

dingung erfüllt, liegt Unabhängigkeit höherer Ordnung zwischen den Merkmalen I, J und K vor.

Die Bedingung für die Unabhängigkeit höherer Ordnung lautet demnach :

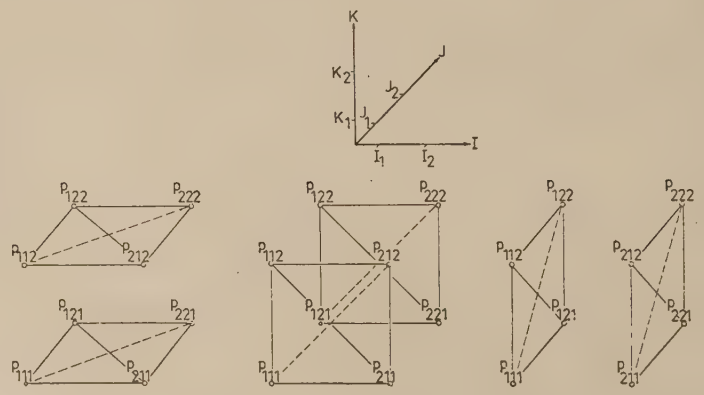
$$\frac{p_{111} \cdot p_{221}}{p_{121} \cdot p_{221}} = \frac{p_{112} \cdot p_{222}}{p_{122} \cdot p_{212}} \qquad (5.1\text{-}13)$$

beziehungsweise

$$\frac{p_{111} \cdot p_{221} \cdot p_{122} \cdot p_{212}}{p_{121} \cdot p_{211} \cdot p_{112} \cdot p_{222}} = 1 \qquad (5.1\text{-}14).$$

Die Bedingung der Unabhängigkeit höherer Ordnung in Form der Gleichung (5.1-14) läßt sich anschaulich graphisch darstellen, wie Abb. 17 zeigt. Die in dieser Abbildung durch gestrichelte Diagonalen verbundenen relativen Häufigkeiten bilden dabei die Faktoren des Produktes im Zähler, die durch durchgezogene Diagonalen verbundenen relativen Häufigkeiten bilden die Faktoren des Produktes im Nenner.

Abb 17 : Die Bedingung der Unabhängigkeit höherer Ordnung für eine 2 × 2 × 2 -Kontingenztabelle



Ist der durch (5.1-14) definierte Kreuzproduktkoeffizient gleich 1, liegt Unabhängigkeit zweiter Ordnung vor. Die Gleichung (5.1-14) stellt die mathematische Formulierung der Nullhypothese der Unabhängigkeit zweiter Ordnung in einer 2 × 2 × 2 -Kontingenztafel dar. Bei mehr als drei beobachteten Merkmalen lassen sich entsprechende Gleichungen für die Unabhängigkeit n-ten Grades ($n \geq 3$) angeben. Im vorliegenden Fall einer 2 × 2 × 2 -Kontingenztafel läßt sich die Nullhypothese der Unabhängigkeit zweiter Ordnung mit dem folgenden Testverfahren prüfen[1]:

Wenn in einer Ebene des Kontingenzwürfels Abhängigkeit herrscht, besteht eine Abweichung der beobachteten relativen Häufigkeiten p_{ijk} von den unter Gültigkeit der Nullhypothese zu erwartenden relativen Häufigkeiten p'_{ijk}. Gleiches gilt auch für die absoluten beobachteten Häufigkeiten n_{ijk} und die zu erwartenden Häufigkeiten n'_{ijk}.

Da in einer Ebene des Kontingenzwürfels nur ein Freiheitsgrad bei der Verteilung der Feldhäufigkeiten bei vorgegebenen Randsummen besteht, ist die jeweilige Abweichung einer beobachteten Feldhäufigkeit von der entsprechenden zu erwartenden Häufigkeit, also $(n_{ijk} - n'_{ijk})$, absolut gesehen immer gleich groß. Diese Abweichung soll im folgenden mit "x" bezeichnet werden.

Unter Gültigkeit der Nullhypothese der Unabhängigkeit zweiter Ordnung muß die Stärke der wechselseitigen Beziehungen zwischen den beiden Merkmalen, die die parallelen Ebenen determinieren, gleich sein. Mit anderen Worten muß die Abweichung x zwischen beobachteten und zu erwartenden Häufigkeiten

1 Vgl. hierzu : BARTLETT, M. S.: a.a.O., S. 249 ff. .

in beiden Ebenen gleich sein.

Daraus ergibt sich die Prüfgröße für die Hypothese der Unabhängigkeit zweiter Ordnung in einer 2 × 2 × 2 - Kontingenztabelle als :

$$P^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \sum_{k=1}^{\ell} \frac{x^2}{n'_{ijk}} = x^2 \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{n'_{ijk}} \qquad (5.1\text{-}15).$$

Diese Prüfgröße entspricht der üblichen χ^2-Prüfgröße für eine 2× 2 ×2 -Kontingenztabelle . Sie ist annähernd χ^2-verteilt[1] mit $\nu = (r-1)\cdot(c-1)\cdot(\ell-1) = 1$ Freiheitsgrad[2]. Da bei Approximation der χ^2-Verteilung mit 1 Freiheitsgrad üblicherweise die YATES-Korrektur verwandt wird, ergibt sich die Prüfgröße als :

$$P_c^2 = (|x| - 0{,}5)^2 \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{n'_{ijk}} \qquad (5.1\text{-}16).$$

Ein Problem stellt bei diesem Testverfahren aller-

---

1 Vgl. zu den Verteilungseigenschaften dieser Prüfgröße : BARTLETT, M. S.: a.a.O., S. 249, der sich auch hier auf eine Anregung FISHER's beruft, vgl.: FISHER, R. A.: On the interpretation of chi-square from contingency tables and the calculation of P, JRSS (A) 85 (1922), S. 87 ff. .

2 Vgl. zur Zahl der Freiheitsgrade : ROY, S. N. und KASTENBAUM, M. A.: a.a.O., S. 750 ff. . Die Zahl der Freiheitsgrade ist beim Test auf Unabhängigkeit höherer Ordnung deswegen kleiner, als beim allgemeinen χ^2-Test, da bei letzterem die Anpassung der beobachteten Häufigkeitsverteilung an eine durch die Nullhypothese definierte beliebige Verteilung geprüft wird, während beim Test auf Unabhängigkeit höherer Ordnung diese Prüfverteilung schon als Multinomialverteilung vorgegeben ist.

dings die Ermittlung des Faktors x beziehungsweise die damit zusammenhängende Bestimmung der n'_{ijk} dar. BARTLETT schlägt zur Berechnung die Lösung der Gleichung[1)]

$$(n_{111}+x)\cdot(n_{221}+x)\cdot(n_{122}+x)\cdot(n_{212}+x) = (n_{121}-x)\cdot(n_{211}-x)\cdot(n_{112}-x)\cdot(n_{222}-x) \qquad (5.1\text{-}17)$$

vor. Diese kubische Gleichung läßt sich aber nicht ohne großen rechentechnischen Aufwand lösen, wobei sich eine reelle und zwei imäginäre Lösungen ergeben[2)].

Untersucht man die Merkmale des Modellbeispiels 1[3)] auf Unabhängigkeit zweiter Ordnung, so ergibt sich zur Ermittlung der Abweichung x die kubische Gleichung

$$(80+x)\cdot(130+x)\cdot(80+x)\cdot(100+x) = (90-x)\cdot(150-x)\cdot(70-x)\cdot(300-x) ,$$

deren Auflösung

$$x^3 - 67{,}1\cdot x^2 + 13.587\cdot x - 200.300 = 0$$

erbringt. Daraus folgt

$$x = 15{,}672 .$$

sowie zwei imaginäre Lösungen.

Eingesetzt in Gleichung (5.1-14) erhält man dann

$$p^2 = (15{,}672)^2 \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{n'_{ijk}} = 19{,}4606$$

beziehungsweise unter Berücksichtigung der YATES-Korrektur :

---

1 Vgl.: BARTLETT, M. S.: a.a.O., S. 249

2 Vgl.: LEWIS, B. N.: On the analysis of interaction in multidimensional contingency tables, JRSS(A) 125 (1962), S. 103

3 Vgl. die Erläuterungen zu Modellbeispiel 1 auf S.24ff..

$$P_c^2 = (15{,}672 - 0{,}5)^2 \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{n'_{ijk}} = 18{,}2386,$$

wobei die n'_{ijk} als $n_{ijk} \pm x$ gemäß Gleichung (5.1-17) berechnet werden können.

Überprüft man die Signifikanz dieses Ergebnisses, kommt man, da

$$\{(P^2 = 19{,}4606) > (P_c^2 = 18{,}2386)\} > \{\chi^2_{c(1;0,05)} = 3{,}84\},$$

zu dem Schluß, daß die Hypothese der Unabhängigkeit zweiten Grades zu verwerfen ist. Der Zusammenhang zwischen der Rechtsform der Unternehmen und deren Gewinnentwicklung wird davon beeinflußt, ob in den Unternehmen die Mitbestimmung praktiziert wird, oder nicht.

Das soeben dargestellte Testverfahren für die Hypothese der Unabhängigkeit zweiter Ordnung ist nicht nur auf die Auswertung von 2 × 2 × 2 -Kontingenztabellen beschränkt, sondern auch für r × c × ℓ - Kontingenztabellen anwendbar, da sich das geschilderte Grundmodell für beliebig viele Merkmalsausprägungen erweitern läßt[1]. Allerdings wachsen hier die rechentechnischen Probleme bei der Lösung der kubischen Gleichung mit steigender Anzahl der Ausprägungen überproportional an[2], sodaß zur Lösung nur mehrstufige Iterationsverfahren herangezogen werden können[3]. Um diesem Problem zu begegnen,

---

1 BARTLETT selbst weist die Erweiterungsmöglichkeit zur Analyse von 2 × 2 × 3 -Kontingenztabellen nach, vgl.: BARTLETT, M. S.: a.a.O., S. 251 f. . Über Erweiterungen auf umfangreichere Kontingenztabellen vgl.: ROY, S. N. und KASTENBAUM, M. A.: a.a.O.,S.754ff..

2 So ist im Falle einer 2 × 2 × ℓ -Kontingenztabelle bereits ein Gleichungssystem mit (ℓ-1) Unbekannten in (ℓ-1) Gleichungen zu lösen, und der Aufwand steigert sich bei einer r × c × ℓ -Tabelle auf die Lösung von (r-1)·(c-1)·(ℓ-1) Gleichungen mit ebensovielen Unbekannten.

3 Vgl.: NORTON, H. W.: a.a.O., S. 251 ff.; KASTENBAUM, M. A. und LAMPHIEAR, D. E.: a.a.O.,S.107ff. .

bemühte man sich, entsprechende Approximationen des BARTLETT'schen Testverfahrens zu entwickeln, von denen die beiden wichtigsten Gruppen, nämlich die Verfahren nach GOODMAN und die informationstheoretischen Verfahren nachfolgend dargestellt werden sollen.

5.2 Die Prüfung von Zusammenhängen höherer Ordnung zwischen drei nominalskalierten Merkmalen mit Hilfe eines Verfahrens von GOODMAN

5.2.1 Die Prüfung von Zusammenhängen höherer Ordnung in 2 × 2 × 2 -Kontingenztafeln

Wie LEWIS ausführt[1], ist eine Menge Geist darauf verwandt worden, die rechentechnischen Probleme des Grundmodells der Analyse der Unabhängigkeit höherer Ordnung von BARTLETT und Nachfolgern zu überwinden.

GOODMAN schließt sich mit seinem Modell[2] diesem Bestreben nicht an, sondern ihm gelingt eine wesentlich einfachere Interpretation eines Tests der Hypothese der Unabhängigkeit höherer Ordnung. Dieses Modell soll im folgenden dargestellt werden[3]. In einer 2 × 2 × 2 -Kontingenztabelle der Merkmale I, J und K sind die relativen Häufigkeiten der einzelnen Merkmalskombinationen definiert als

$$p_{ijk} = \frac{n_{ijk}}{n} \qquad (5.2.1\text{-}1),$$

wobei

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} p_{ijk} = 1 \qquad (5.2.1\text{-}2)$$

---

1 Vgl.: LEWIS, B. N.: a.a.O., S. 105 .

2 Erstmals in : GOODMAN, L. A.: On PLACKETT's test for contingency table interactions, JRSS(B) 25(1963), S. 186 f. .

3 Vgl. zum Folgenden : GOODMAN, L. A.: Simple methods..., a.a.O., S. 322 ff. .

und

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} n_{ijk} = n \qquad (5.2.1\text{-}3).$$

Die relativen Randhäufigkeiten ergeben sich als

$$p_{i..} = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} p_{ijk} \qquad (5.2.1\text{-}4)$$

$$p_{.j.} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} p_{ijk} \qquad (5.2.1\text{-}5)$$

$$p_{..k} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p_{ijk} \qquad (5.2.1\text{-}6).$$

Mit diesen Angaben kann man eine bedingte relative Häufigkeit über eine Merkmalskombination IJ in der Ebene K_k, (k=1,2), eines entsprechenden Kontingenzwürfels angeben als

$$\pi_{ijk} = \frac{p_{ijk}}{p_{..k}} \quad \text{für } k=1,2 \qquad (5.2.1\text{-}7),$$

wobei

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \pi_{ijk} = 1 \text{ für alle } k=1,2 \qquad (5.2.1\text{-}8).$$

Die BARTLETT'sche Formulierung der Hypothese der Unabhängigkeit zweiter Ordnung für eine 2 × 2 × 2 -Kontingenztabelle war, wie in (5.1-13), definiert :

$$H_o : \frac{p_{111}\cdot p_{221}}{p_{121}\cdot p_{211}} = \frac{p_{112}\cdot p_{222}}{p_{122}\cdot p_{212}} \qquad (5.2.1\text{-}9).$$

Ersetzt man in dieser Gleichung die p_{ijk} entsprechend (5.2.1-7), so kann die Nullhypothese angegeben werden als

$$H_o : \frac{\pi_{111}\cdot\pi_{221}}{\pi_{121}\cdot\pi_{211}} = \frac{\pi_{112}\cdot\pi_{222}}{\pi_{122}\cdot\pi_{212}} \qquad (5.2.1\text{-}10).$$

Schreibt man zur Vereinfachung für die Kreuzprodukte dieser Nullhypothese

$$\frac{\pi_{11k} \cdot \pi_{22k}}{\pi_{12k} \cdot \pi_{21k}} = \Delta_k \text{ für alle } k=1,2 \quad (5.2.1\text{-}11),$$

läßt sich die Nullhypothese formulieren als

$$H_o : \Delta_1 = \Delta_2 \text{ beziehungsweise } \Delta_1 - \Delta_2 = 0 \quad (5.2.1\text{-}12).$$

Da hier

$$n_{..k} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} n_{ijk} \quad (5.2.1\text{-}13),$$

gilt, daß die Verteilung der Zufallsvariablen n_{ijk} auf der Stufe der k-ten Schicht, gegeben durch die Verteilung $(n_{11k}, n_{12k}, n_{21k}, n_{22k})$, einer Multinomialverteilung mit den Parametern $(\pi_{11k}, \pi_{12k}, \pi_{21k}, \pi_{22k})$ folgt[1].

Unter Berücksichtigung dieser Tatsache läßt sich für Δ_k ein Maximum-Likelihood-Schätzwert

$$d_k = \frac{n_{11k} \cdot n_{22k}}{n_{12k} \cdot n_{21k}} \text{ für alle } k=1,2 \quad (5.2.1\text{-}14)$$

ermitteln, dessen Varianz v_k definiert ist als[2]

$$v_k = d_k^2 \cdot u_k \quad (5.2.1\text{-}15),$$

wobei

$$u_k = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} n_{ijk}^{-1} \quad (5.2.1\text{-}16).$$

Mit Hilfe dieser Schätzwerte und den ermittelteten Varianzen läßt sich die Hypothese der Unabhängig-

---

1 Vgl. hierzu : KENDALL, M. G. und STUART, A.: The advanced theory ..., Vol. 1, a.a.O., S. 141 ff. .

2 Vgl.: KENDALL, M. G. und STUART, A.: The advanced theory ..., Vol. 2, a.a.O., S. 540 f. .

keit zweiter Ordnung in einer 2 × 2 × 2 -Kontingenztabelle testen.

GOODMAN bedient sich dazu einer Prüfgröße[1)]

$$X^2 = \frac{(d_1 - d_2)^2}{v_1 + v_2} \qquad (5.2.1\text{-}17),$$

die die Abweichung zwischen den Schätzwerten für die Kreuzproduktkoeffizienten auf die gemeinsame Varianz der beiden Schätzwerte bezieht.

Da die multinomialverteilten Schätzwerte d_k bei $n \to \infty$ durch eine Normalverteilung approximiert werden können, die in eine Standardnormalverteilung transformiert werden kann, ergibt sich für die Prüfgröße X^2 als asymptotische Prüfverteilung eine χ^2-Verteilung mit $\nu = 1$ Freiheitsgrad[2)].

Berechnet man die Prüfgröße X^2 für das Modellbeispiel 1[3)], so ergibt sich :

$$d_1 = \frac{80 \cdot 130}{90 \cdot 150} = 0{,}770 \qquad d_2 = \frac{70 \cdot 300}{80 \cdot 100} = 2{,}625$$

$$u_1 = \frac{1}{80} + \frac{1}{90} + \frac{1}{150} + \frac{1}{130} = 0{,}038$$

$$u_2 = \frac{1}{70} + \frac{1}{80} + \frac{1}{100} + \frac{1}{300} = 0{,}040$$

$$v_1 = 0{,}770^2 \cdot 0{,}038 = 0{,}023$$

$$v_2 = 2{,}625^2 \cdot 0{,}040 = 0{,}276.$$

Damit ergibt sich die Prüfgröße :

---

1 Vgl. z.B.: GOODMAN, L. A.: On methods for comparing contingency tables, JRSS(A) 126 (1963), S. 97 .

2 Vgl. hierzu die Ausführungen auf S. 51 dieser Arbeit.

3 Vgl. die Erläuterungen zu Modellbeispiel 1 auf S. 24 ff. .

$$X^2 = \frac{(0,770 - 2,625)^2}{0,023 + 0,276} = 11,505 \quad .$$

Unter der Voraussetzung der Gültigkeit der Nullhypothese $\Delta_1 = \Delta_2$ ist X^2 annähernd χ^2-verteilt mit $\nu = 1$ Freiheitsgrad. Daraus folgt, da

$$(X^2 = 11,505) > (\chi^2_{c(1;0,05)} = 3,84),$$

daß die Nullhypothese von der Unabhängigkeit zweiter Ordnung nicht beinehalten werden kann.

Vergleicht man den hier errechneten Wert der Prüfgröße für das Modellbeispiel 1 von $X^2 = 11,505$ mit dem entsprechenden Wert der im BARTLETT-Modell errechneten Prüfgröße von $P_c^2 = 18,239$, so zeigt sich eine relativ große Abweichung zwischen den Werten dieser beiden Prüfgrößen. Diese liegt begründet in der vergleichsweise schlechten Approximation der Multinomialverteilung der n_{ijk} durch eine Normalverteilung bei nur jeweils 2 Merkmalsausprägungen.

Die Approximation läßt sich aber verbessern, wenn man sich der folgenden Überlegung bedient: Wirken Zufallsgrößen multiplikativ zusammen, wie das bei wirtschaftsstatistischen Merkmalen häufig der Fall ist, so entspricht die Verteilung der resultierenden Zufallsvariablen nicht einer Normalverteilung, die ja bekanntlich aus dem additiven Zusammenwirken von unendlich vielen Zufallsgrößen entsteht. Logarithmiert man nun aber die multiplikativ zusammenwirkenden Zufallsgrößen, wird durch diese Transformation das multiplikative Zusammenwirken in ein additives überführt. Damit läßt sich die Verteilung der gemeinsamen Zufallsvariablen wesentlich besser durch eine Normalverteilung approximieren[1)].

1 Vgl. hierzu : JOHNSON, N. L. und KOTZ, S.: Distributions in statistics - continous univariate distributions - 1 , Boston 1970, S. 112 ff. .

Dieser Gedanke bedeutet für das hier vorliegende Problem, daß durch eine Logarithmierung der n_{ijk} eine bessere Approximation der sie beschreibenden Multinomialverteilung durch eine Normalverteilung erreicht wird, was wiederum eine bessere Erklärung der Verteilung einer entsprechenden Prüfgröße durch eine χ^2-Verteilung zur Folge hat.

Die Basierung der Logarithmen spielt hierbei für die Güte der Approximation keine Rolle. Wegen der Einheitlichkeit der Darstellung im Rahmen dieser Arbeit sollen im folgenden wiederum natürliche Logarithmen verwandt werden.

Durch die logarithmische Transformation der Ausgangsdaten untersucht man nunmehr die Nullhypothese

$$H_o : \ln(\Delta_1) = \ln(\Delta_2) \qquad (5.2.1\text{-}18).$$

Es gilt hier auch, daß $\ln(d_k)$ ein Maximum-Likelihood-Schätzwert für $\ln(\Delta_k)$ ist. Die Varianz der $\ln(d_k)$ wird durch u_k bestimmt[1]. Damit ergibt sich für den Test der Nullhypothese (5.2.1-18) im Falle einer 2 × 2 × 2-Kontingenztabelle in Analogie zu (5.2.1-17) die Prüfgröße

$$Y^2 = \frac{\{\ln(d_1) - \ln(d_2)\}^2}{u_1 + u_2} \qquad (5.2.1\text{-}19).$$

Durch die Logarithmierung gilt[2]:

$$\ln(d_k) = \ln(n_{11k}) + \ln(n_{22k}) - \ln(n_{12k}) - \ln(n_{21k}) \qquad (5.2.1\text{-}20).$$

Unter Gültigkeitdder Nullhypothese ist auch die

---

1 Vgl.: GOODMAN, L. A.: Simple methods..., a.a.O., S. 323 .

Auch hier wird, wegen $\lim_{n \to 0}(\ln(n)) = 0$, $\ln(0) = 0$ definiert.

Prüfgröße Y^2 asymptotisch χ^2-verteilt mit $\nu = 1$ Freiheitsgrad[1].

Ermittelt man die Prüfgröße Y^2 für das Modellbeispiel 1[2], so erhält man :

$$\ln(d_1) = \ln(80)+\ln(130)-\ln(90)-\ln(150) = -0,261$$

$$\ln(d_2) = \ln(70)+\ln(300)-\ln(80)-\ln(100) = 0,965$$

und

$$Y^2 = \frac{(-0,261 - 0,965)^2}{0,038 + 0,040} = 19,247 .$$

Die Prüfgröße Y^2 ist unter Gültigkeit der Nullhypothese der Unabhängigkeit zweiter Ordnung annähernd χ^2-verteilt mit $\nu = 1$ Freiheitsgrad. Da

$$(Y^2 = 19,247) > (\chi^2_{c(1;0,05)} = 3,84),$$

folgt ebenfalls die Ablehnung der Nullhypothese. Vergleicht man $Y^2 = 19,247$ mit $P^2 = 19,461$ beziehungsweise $P_c^2 = 18,239$, so ist die bessere Entsprechung zwischen den beiden Arten von Prüfgrößen augenscheinlich, im Gegensatz zum Vergleich zwischen X^2 und P^2.

Untersucht man die Unabhängigkeit zweiter Ordnung nicht nur in einer Richtung, wie bisher, sondern prüft man sie auch in den beiden anderen möglichen Richtungen, so ist die Symmetrie der sich ergebenden Resultate von Interesse. Unter Symmetrie sei hier zu verstehen, daß die Abhängigkeit zweiter Ordnung zwischen den Merkmalen I und J bei allen Ausprägungen des Merkmals K gleich ist der Abhängigkeit zweiter Ordnung zwischen I und K bei allen Ausprägungen von J und gleich ist der Abhängigkeit

---

1 Vgl.: GOODMAN, L. A.: On PLACKETT's test ... , a.a.O., S. 187 .

2 Vgl. die Erläuterungen zu Modellbeispiel 1 auf S. 24 ff. .

zweiter Ordnung zwischen J und K bei allen Ausprägungen von I. Es zeigt sich, daß der BARTLETT-Test und der Y^2-Test zu symmetrischen Ergebnissen führen, nicht aber der X^2-Test[1].

Aufgrund der Tatsache, daß die Prüfgröße Y^2 eine bessere Approximation der Prüfgröße P^2 darstellt[2], als X^2 und unter Berücksichtigung des angeführten Gedankens der Symmetrie der Ergebnisse soll im folgenden nur noch die Prüfgröße Y^2 bei den Ausweitungen des Modells dargestellt werden.

5.2.2 Die Prüfung von Zusammenhängen höherer Ordnung in 2 × 2 × ℓ-Kontingenztafeln

Treten in der Untersuchung des gemeinsamen Auftretens von drei nominalskalierten Merkmalen zwei Merkmale dichotom auf, während das dritte Merkmal in mehr als zwei Ausprägungen vorliegt, so läßt sich der GOODMAN-Test mit der Prüfgröße Y^2 wie folgt erweitern[3]:

Ausgehend von der bisher untersuchten Nullhypothese der Unabhängigkeit zweiter Ordnung in der Form

$$H_o : \Delta_1 = \Delta_2$$

muß diese Hypothese für die Untersuchung einer $2 \times 2 \times \ell$ -Kontingenztabelle erweitert werden zu

$$H_o : \Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_\ell \qquad (5.2.2\text{-}1).$$

Diese Hypothese läßt sich so interpretieren, daß

1 Vgl.: GOODMAN, L. A.: Simple methods...,a.a.O.,S.325.

2 Vgl.: GOODMAN, L. A.: On PLACKETT's test..., a.a.O., S. 187; GOODMAN, L. A.: Simple methods...,a.a.O., S. 325 und 327 .

3 Vgl. zum Folgenden : GOODMAN, L. A.: Simple methods..., a.a.O., S. 325 ff. .

die zwischen den Merkmalen I und J in einer Schicht K_k, (k=1,2,3,...,) bestehende Abhängigkeit, ausgedrückt in Form des Kreuzproduktkoeffizienten Δ_k, in allen ℓ Schichten nicht signifikant voneinander abweichen darf.

Definiert man

$$g_k = \ln(n_{11k}) + \ln(n_{22k}) - \ln(n_{12k}) - \ln(n_{21k}) \qquad (5.2.2\text{-}2),$$

$$u_k = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} n_{ijk}^{-1} \qquad (5.2.2\text{-}3)$$

und

$$m_k = u_k^{-1} \qquad (5.2.2\text{-}4),$$

dann läßt sich die Unabhängigkeit zweiter Ordnung in einer $2 \times 2 \times \ell$ -Kontingenztabelle prüfen mit[1)]

$$Y^2 = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\left[g_k - \frac{\sum_{k=1}^{\ell} g_k \cdot m_k}{\sum_{k=1}^{\ell} m_k} \right]^2}{u_k} \qquad (5.2.2\text{-}5).$$

Unter Gültigkeit der Nullhypothese ist Y^2 asymptotisch χ^2-verteilt mit $\nu = (r-1)\cdot(c-1)\cdot(\ell-1) = (\ell-1)$ Freiheitsgraden[2)].

Die dargestellte Erweiterung des GOODMAN'schen Modells soll anhand eines Modellbeispiels 2 verdeutlicht werden. Ein Meinungsforschungsinstitut führt sechs Monate lang an jeweils einem Stichtag eine Befragung von Wahlberechtigten durch. Es wird untersucht, ob diese mit der Amtsführung der Regierungs-

1 Vgl.: GOODMAN, L. A.: Simple methods..., a.a.O., S.326.

2 Bei mehr als 30 Freiheitsgraden ist die Signifikanzprüfung eines ermittelten Ergebnisses wiederum mit Hilfe der standardnormalverteilten Prüfgröße in Gleichung (4.2.1-9) möglich.

partei so zufrieden sind, daß sie diese Partei X wählen würden, wenn bald eine Parlamentswahl stattfände. Die Befragung habe das in Tabelle 24 wiedergegebene Ergebnis erbracht.

Tab. 24 : Befragungsergebnisse von jeweils 500 Wahlberechtigten

Geschlecht der Befragten	Antwort auf Befragung	Befragungsmonat: Januar	Februar	März	April	Mai	Juni
Weiblich	Ich würde Partei X wählen	100	70	100	150	80	90
	Ich würde Partei X nicht wählen	150	180	150	100	170	160
Männlich	Ich würde Partei X wählen	150	120	120	150	120	130
	Ich würde Partei X nicht wählen	100	130	130	100	130	120

Zu untersuchen ist hier die Hypothese :

H_o : Die Abhängigkeit zwischen dem Geschlecht der Wahlberechtigten und ihrer Wahlabsicht ist unabhängig vom Ablauf des betrachteten Zeitraums,

oder anders ausgedrückt :

$$H_o : \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5 = \Delta_6.$$

Aus der Tabelle der Befragungsergebnisse läßt sich errechnen :

k	g_k	u_k	m_k	$g_k\, m_k$
1	-0,811	0,033	30	-24,324
2	-0,865	0,036	27,881	-24,103
3	-0,325	0,038	30,588	- 9,953
4	0	0,033	30	0
5	-0,674	0,034	29,063	-19,583
6	-0,655	0,033	29,952	-19,631

Setzt man diese Werte in Gleichung (5.2.2-5) ein, ergibt sich :

$$Y^2 = 16{,}194 \ .$$

Die Prüfgröße Y^2 ist annähernd χ^2-verteilt mit $\nu = 5$ Freiheitsgraden. Da

$$(Y^2 = 16{,}194) > (\chi^2_{c(5;0{,}05)} = 11{,}07),$$

muß die Hypothese der Unabhängigkeit zweiter Ordnung verworfen werden. Der Zusammenhang zwischen dem Geschlecht der Wahlberechtigten und ihrer Wahlabsicht wird vom Ablauf des betrachteten Zeitraums beeinflußt.

Ein interessanter Teilaspekt dieser Analyse ergibt sich, wenn man die Nullhypothese in Gleichung (5.2.2-1) betrachtet. Diese Nullhypothese läßt sich aufspalten in eine Gruppe von Nullhypothesen[1] :

$H_{o-1}: \Delta_1 = \Delta_2$

$H_{o-2}: \Delta_1 = \Delta_3$ bei Gültigkeit von H_{o-1}

$H_{o-3}: \Delta_1 = \Delta_4$ bei Gültigkeit von H_{o-1}, H_{o-2}

$H_{o-(\ell-1)}: \Delta_1 = \Delta_\ell$ bei Gültigkeit von $H_{o-1}, \ldots, H_{o-(\ell-2)}$

1 Vgl.: GOODMAN, L. A.: Simple methods..., a.a.O., S.329.

Für jede einzelne dieser Hypothesen läßt sich die Analyse der Unabhängigkeit zweiter Ordnung durchführen. Führt man den Test in der vorgeschriebenen Reihenfolge durch, lassen sich mögliche Änderungen der Beeinflussungen des Zusammenhangs zwischen den Merkmalen I und J durch das Merkmal K genauer lokalisieren. Für Modellbeispiel 2 bedeutet dies, daß man genauer feststellen kann ob und gegebenenfalls wann die gesamtpolitische Entwicklung im Zeitablauf eine Änderung des Zusammenhangs zwischen dem Geschlecht von Wahlberechtigten und deren Wahlabsicht hergerufen hat.

Ein dementsprechender Test der einzelnen Unterhypothesen wird in Analogie zu der Prüfgröße Y^2 in Gleichung (5.2.1-19) durchgeführt mit[1)]

$$Y^2 = \frac{(g_{k+1} - g'_k)^2}{(u_{k+1} + u'_k)} \quad \text{für } k = 1,2,\ldots,(\ell-1) \quad (5.2.2\text{-}6),$$

wobei

$$g'_k = \frac{\sum_{h=1}^{k} g_h \cdot m_h}{\sum_{h=1}^{k} m_h} \quad (5.2.2\text{-}7)$$

und

$$u'_k = \sum_{h=1}^{k} m_h^{-1} \quad (5.2.2\text{-}8).$$

Es läßt sich zeigen[2)], daß

$$Y^2 = \sum_{h=1}^{k} Y_h^2 \quad (5.2.2\text{-}9).$$

Führt man diesen Test für das Modellbeispiel 2[3)] durch, so ergibt sich :

---

1 Vgl.: GOODMAN, L. A.: Simple methods..., a.a.O., S. 330.

2 Vgl. den Beweis bei : GOODMAN, L. A.: Simple methods.., a.a.O., S. 348 ff. .

3 Vgl. die Erläuterungen zu Modellbeispiel 2 auf S. 160 ff. .

H_{o-1}: $\Delta_1 = \Delta_2$ $\quad Y_1^2 = 0{,}042$

H_{o-2}: $\Delta_1 = \Delta_3$ Bedingung: $\Delta_1 = \Delta_2$ $\quad Y_2^2 = 5{,}231$

H_{o-3}: $\Delta_1 = \Delta_4$ Bedingung: $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$ $\quad Y_3^2 = 9{,}764$

H_{o-4}: $\Delta_1 = \Delta_5$ Bedingung: $\Delta_1 = \ldots = \Delta_4$ $\quad Y_4^2 = 0{,}765$

H_{o-5}: $\Delta_1 = \Delta_6$ Bedingung: $\Delta_1 = \ldots = \Delta_5$ $\quad Y_5^2 = 0{,}401$

Nach Gleichung (5.2.2-9) ergibt sich Y^2 als Summe der Y_h^2. Die im vorliegenden Beispiel zu beobachtende Abweichung zwischen Y^2 und Y_h^2 von 0,008 ist auf Rundungsfehler zurückzuführen.

Überprüft man die Signifikanz der Ergebnisse, so zeigt sich, daß mit einem Sicherheitsrisiko von 5 % gesagt werden kann, daß im Monat März die gesamtpolitische Entwicklung die Abhängigkeit zwischen Geschlecht und Wahlabsicht der Wahlberechtigten überzufällig stark beeinflußt hat.

5.2.3 Die Prüfung des Zusammenhangs höherer Ordnung in $2 \times c \times \ell$ -Kontingenztafeln

Im Falle einer Kontingenztafel vom Umfang $2 \times 2 \times \ell$ war die Hypothese der Unabhängigkeit zweiter Ordnung dadurch überprüfbar, daß die 2×2 -Kreuzprodukte jeder der ℓ Schichten als Kennzahlen der einfachen Abhängigkeit ermittelt und dann verglichen wurden. Ergab sich daraus keine signifikante Abweichung der Δ_k voneinander, konnte die Hypothese der Unabhängigkeit zweiter Ordnung nicht verworfen werden.

Untersucht man nunmehr die Hypothese der Unabhängigkeit zweiter Ordnung in einer $2 \times c \times \ell$ -Kontin-

genztabelle, so findet sich in jeder der ℓ Schichten eine zweidimensionale Kontingenztabelle vom Umfang $2 \times c$. Innerhalb einer solchen $2 \times c$ -Kontingenztabelle läßt sich die einfache Abhängigkeit durch (c-1) Kreuzprodukte

$$\Delta_{\tilde{j}k} = \frac{\pi_{1\tilde{j}k} \cdot \pi_{2ck}}{\pi_{1ck} \cdot \pi_{2\tilde{j}k}} \quad \begin{matrix} \text{für } \tilde{j} = 1,2,\ldots,(c-1) \\ \text{bei } k = 1,2,\ldots, \end{matrix} \qquad (5.2.3\text{-}1)$$

angeben.

Zur Erläuterung diene die folgende 2×3 -Kontingenztabelle, die in der k-ten Schicht vorliege :

I \ J	J_1	J_2	J_3
I_1	n_{11k}	n_{12k}	n_{13k}
I_2	n_{21k}	n_{22k}	n_{23k}

Aus dieser zweidimensionalen Kontingenztabelle lassen sich die Kreuzprodukte

$$\Delta_{1k} = \frac{\pi_{11k} \cdot \pi_{23k}}{\pi_{13k} \cdot \pi_{21k}} \quad \text{und} \quad \Delta_{2k} = \frac{\pi_{12k} \cdot \pi_{23k}}{\pi_{13k} \cdot \pi_{22k}}$$

ermitteln und durch entsprechende Schätzwerte $d_{\tilde{j}k}$ schätzen[1].

Die Nullhypothese der einfachen Unabhängigkeit in der $2 \times c$ -Kontingenztabelle der k-ten Schicht läßt sich dann formulieren als

$$H_o : \Delta_{1k} = \Delta_{2k} = \ldots = \Delta_{(c-1)k} \qquad (5.2.3\text{-}2)$$

---

1 Es läßt sich zeigen, daß bei einfacher Unabhängigkeit in allen dieser (c-1) Untertabellen auch Unabhängigkeit in allen anderen kombinatorisch möglichen Untertabellen und in der Gesamttabelle besteht. Vgl.: GOODMAN, L. A.: Simple methods ..., a.a.O., S. 331 ff. .

beziehungsweise

$$H_o : \ln(\Delta_{1k}) = \ln(\Delta_{2k}) = \ldots = \ln(\Delta_{(c-1)k}) \quad (5.2.3\text{-}3).$$

Betrachtet man nicht nur die k-te Schicht, sondern alle Schichten der dreidimensionalen Kontingenztabelle, so verallgemeinert sich die Nullhypothese der Unabhängigkeit zweiter Ordnung in der Form (5.2.2-12) zu

$$H_o : \ln(\Delta_{\tilde{j}1}) = \ln(\Delta_{\tilde{j}2}) = \ldots = \ln(\Delta_{\tilde{j}\ell}) \quad \text{für } \tilde{j}=1,2,\ldots,(c-1) \quad (5.2.3\text{-}4).$$

Stellt man die Nullhypothese der einfachen Unabhängigkeit in der Form (5.2.3-3) für die k-te Schicht als Spaltenvektor

$$\Gamma_k = \begin{Bmatrix} \ln(\Delta_{1k}) \\ \ln(\Delta_{2k}) \\ \vdots \\ \ln(\Delta_{(c-1)k}) \end{Bmatrix} \quad (5.2.3\text{-}5)$$

dar, so läßt sich die Nullhypothese der Unabhängigkeit zweiter Ordnung auch angeben als

$$H_o : \Gamma_1 = \Gamma_2 = \ldots = \Gamma_\ell \quad (5.2.3\text{-}6).$$

Mit Verfahren der multivariaten Statistik läßt sich nun überprüfen, ob diese Hypothese der Gleichheit von Spaltenvektoren zutrifft. Dazu schätzt man, analog zu Unterabschnitt 5.2.1, die $\Delta_{\tilde{j}k}$ durch $d_{\tilde{j}k}$,

$$d_{\tilde{j}k} = \frac{n_{1\tilde{j}k} \cdot n_{2ck}}{n_{1ck} \cdot n_{2\tilde{j}k}} \quad \text{für } \tilde{j}=1,2,\ldots,(c-1) \text{ bei } k=1,2,\ldots,\ell \quad (5.2.3\text{-}7),$$

beziehungsweise $g_{jk}^{\sim}$ durch $\ln(d_{jk}^{\sim})$,

$$g_{jk}^{\sim} = \ln(n_{1jk}^{\sim}) + \ln(n_{2ck}) - \ln(n_{1ck}) - \ln(n_{2jk}^{\sim}) \quad (5.2.3\text{-}8).$$

Schließlich schätzt man die Γ_k durch g_k, wobei

$$g_k = \begin{Bmatrix} g_{1k} \\ g_{2k} \\ \vdots \\ g_{(c-1)k} \end{Bmatrix} \quad (5.2.3\text{-}9).$$

Die Verteilung der Spaltenvektoren g_k nähert sich mit wachsendem Untersuchungsumfang n asymptotisch einer multidimensionalen Normalverteilung[1]. Hierbei läßt sich eine quadratische Varianz-Kovarianz-Matrix $T^{(k)}$ für die g_k angeben[2], die das Format $(c-1)\times(c-1)$ hat. Diese Matrix läßt sich unter Verwendung der beobachteten Daten schätzen durch eine Matrix $U^{(k)}$. Invertiert man diese Matrix, um das exponentielle Gleichungssystem einer multivariaten Normalverteilung bestimmen, ergibt sich[3]

$$\left[U^{(k)}\right]^{-1} = M^{(k)} \quad (5.2.3\text{-}10).$$

Diese Matrix ist ebenfalls quadratisch vom Umfang $(c-1)\times(c-1)$. Bei Verwendung der Theorie der multidimensionalen Normalverteilung ergibt sich, daß die Nullhypothese (5.2.3-6) getestet werden kann mit der Prüfgröße[4]

$$Y^2 = \sum_{k=1}^{\ell} g_k' \cdot M^{(k)} \cdot g_k - \tilde{g}' \cdot Q \cdot \tilde{g} \quad (5.2.3\text{-}11),$$

---

1 Vgl.: GOODMAN, L.A.: Simple methods..., a.a.O., S.331.

2 Vgl.: KENDALL, M. G. und STUART, A.: The advanced theory ..., Vol. 1, a.a.O., S. 349 .

3 Vgl.: GOODMAN, L.A.: Simple methods..., a.a.O., S.350ff. .

4 Vgl.: GOODMAN, L.A.: Simple methods..., a.a.O., S.331.

die unter Gültigkeit der Nullhypothese asymptotisch χ^2-verteilt ist mit $\nu = (r-1)\cdot(c-1)\cdot(\ell-1)$ Freiheitsgraden. Die einzelnen Elemente der Prüfgröße haben die folgende Bedeutung :

$$g_k = \begin{Bmatrix} g_{1k} \\ g_{2k} \\ \vdots \\ g_{(c-1)k} \end{Bmatrix}$$

g'_k ist der transponierte Vektor zu g_k, also der Zeilenvektor

$$g'_k = \left\{ g_{1k} \quad g_{2k} \quad \cdots \quad g_{(c-1)k} \right\} \qquad (5.2.1\text{-}12).$$

$M^{(k)}$ ist die oben unter (5.2.3-10) definierte Matrix mit den Elementen

$$M^{(k)} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1(c-1)} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2(c-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{(c-1)1} & m_{(c-1)2} & \cdots & m_{(c-1)(c-1)} \end{bmatrix} \qquad (5.2.3\text{-}13)$$

Für die praktische Berechnung weist GOODMAN nach[1], daß man auf die Inversion der Matrix $U^{(k)}$ verzichten kann, da sich die Matrix $M^{(k)}$ direkt aus den Beobachtungswerten ermitteln läßt.

$\tilde{g}$ ist ein Spaltenvektor, der definiert ist als

$$\tilde{g} = \sum_{k=1}^{\ell} M^{(k)} \cdot g_k \qquad (5.2.3\text{-}14)$$

---

1 Vgl.: GOODMAN, L. A.: Simple methods, ..., a.a.O., S. 350 ff. .

Q ist die Inverse der Summenmatrix der $M^{(k)}$, also

$$Q = \left[\sum_{k=1}^{\ell} \left[M^{(k)} \right] \right]^{-1} \qquad (5.2.3\text{-}15).$$

$\tilde{g}'$ ist ein Zeilenvektor, der sich als transponierter Vektor zu $\tilde{g}$ ergibt.

Die $m_{\tilde{j}\tilde{j}}$, $(\tilde{j}=1,2,\ldots,(c-1))$ lassen sich wie folgt aus den beobachteten Feldhäufigkeiten schätzen[1]:

$$m_{\tilde{j}h} = - \frac{a_{\tilde{j}k} \, a_{hk}}{a_{.k}} \quad \text{für alle } \tilde{j} \neq h \qquad (5.2.3\text{-}16)$$

$$m_{\tilde{j}\tilde{j}} = a_{\tilde{j}k} \cdot \left[1 - \frac{a_{\tilde{j}k}}{a_{.k}} \right] \text{für alle } \tilde{j}=\tilde{j} \qquad (5.2.3\text{-}17).$$

Dabei ist

$$a_{\tilde{j}k} = \left[n_{1\tilde{j}k}^{-1} + n_{2\tilde{j}k}^{-1} \right]^{-1} \qquad (5.2.3\text{-}18)$$

und[2]

$$a_{.k} = \sum_{\tilde{j}=1}^{c} a_{\tilde{j}k} \qquad (5.2.3\text{-}19)$$

Es läßt sich zeigen, daß die Prüfgröße Y^2 in Gleichung (5.2.1-19) und die Prüfgröße Y^2 in Gleichung (5.2.2-5) für Kontingenztabellen vom Umfang $2 \times 2 \times 2$ beziehungsweise $2 \times 2 \times \ell$ als Spezialfälle der Prüfgröße Y^2 in Gleichung (5.2.3-11) zu betrachten sind[3]

Die Ermittlung der Prüfgröße Y^2 in der vorbeschrie-

1 Vgl. die Ableitung der $m_{\tilde{j}\tilde{j}}$ bei : GOODMAN, L. A.: Simple methods ..., a.a.O., S. 350 ff. .

2 Vgl. speziell zur Bestimmung von $a_{.k}$: GOODMAN, L. A.: On PLACKETT's test ..., a.a.O., S. 181 ff. .

3 Vgl.: GOODMAN, L.A.: Simple methods..., a.a.O., S. 332.

benen Form soll nun anhand eines Modellbeispiels 3 verdeutlicht werden. Es wird dabei bewußt von einem Modell der Dimension 2 × 3 × 2 ausgegangen, da die arithmetischen Operationen leicht nachprüfbar sein sollen.

Angenommen, ein Marktforschungsinstitut erhält den Auftrag, zu ermitteln, wie die Verpackung eines neuen Produktes den Verbrauchern angeboten werden soll. Die Verpackung kann entweder eine Klarsichtpackung oder ein Karton sein (Merkmal K), außerdem sind beide Verpackungsformen in den Farben rot, blau und grün denkbar (Merkmal J). Da zudem das neue Produkt sowohl männliche als auch weibliche Konsumenten ansprechen soll, ist es von Interesse, zu erfahren, ob das Geschlecht der Konsumenten einen Einfluß auf die bestehende Beziehung zwischen gewünschter Form und gewünschter Farbe ausübt[1].

Aus der Befragung von 336 potentiellen Käufern über deren Präferenzen für die verschiedenen Verpackungsmöglichkeiten habe sich Tab. 25 ergeben :

Tab. 25 : Befragungsergebnisse von 336 Personen über Präferenzen bei Verpackungsform und Verpackungsfarbe

Bevorzugte Verpackungsform / Bevorzugte Verpackungsfarbe	Klarsichtpackung			Kartonpackung		
Geschlecht der befragten Personen	rot	grün	blau	rot	grün	blau
Männlich	50	11	5	50	10	66
Weiblich	75	19	7	70	25	8

1 Zwischen Verpackungsform und -farbe besteht im vorliegenden Beispiel in den Präferenzen der Käufer Unabhängigkeit. Ein zweidimensionaler χ^2-Test

Zu prüfen ist die Hypothese der Unabhängigkeit zweiter Ordnung, also

$$H_o : \Gamma_1 = \Gamma_2 .$$

Dazu ermittelt man die Prüfgröße

$$Y^2 = \sum_{k=1}^{\ell} g_k' \cdot M^{(k)} \cdot g_k - \tilde{g}' \cdot Q \cdot \tilde{g},,$$

die hier unter Gültigkeit der Nullhypothese asymptotisch χ^2-verteilt ist mit $\nu = (2-1)\cdot(3-1)\cdot(2-1) = 2$ Freiheitsgraden.

Man erhält :

$$g_1 = \begin{Bmatrix} \ln(50)+\ln(7)-\ln(5)-\ln(75) \\ \ln(11)+\ln(7)-\ln(5)-\ln(19) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,069 \\ -0,210 \end{Bmatrix}$$

$$g_2 = \begin{Bmatrix} \ln(50)+\ln(8)-\ln(6)-\ln(70) \\ \ln(10)+\ln(8)-\ln(6)-\ln(25) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,049 \\ -0,629 \end{Bmatrix}$$

$$g_1' = \{-0,069 \ -0,210\} \quad g_2' = \{-0,049 \ -0,629\} .$$

Ermittlung vom $M^{(1)}$:

$$m_{11} = a_{11}\left[1-\frac{a_{11}}{a_{.1}}\right] \qquad a_{11} = (\tfrac{1}{50}+\tfrac{1}{75})^{-1} = 30$$

$$m_{22} = a_{21}\left[1-\frac{a_{21}}{a_{.1}}\right] \qquad a_{21} = (\tfrac{1}{11}+\tfrac{1}{19})^{-1} = 6,967$$

$$m_{12}=m_{21} = -\frac{a_{21}\,a_{11}}{a_{.1}} \qquad a_{31} = (\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7})^{-1} = 2,917$$

$$\sum_{j=1}^{3} a_{j1} = a_{.1} = 39,884$$

Daraus ergibt sich

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} 7,434 & -5,240 \\ -5,240 & 5,750 \end{bmatrix}$$

Die Matrix $M^{(2)}$ ergibt sich dazu analog als

$$M^{(2)} = \begin{bmatrix} 7,759 & -5,243 \\ -5,243 & 5,859 \end{bmatrix}$$

Weiterhin erhält man :

$$\tilde{g} = \sum_{k=1}^{\ell} M^{(k)} \cdot g_k = \begin{Bmatrix} 3,504 \\ -4,273 \end{Bmatrix}$$

$$\tilde{g}' = \begin{Bmatrix} 3,504 & -4,273 \end{Bmatrix}$$

$$Q = \left[\sum_{k=1}^{\ell} M^{(k)}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 15,193 & -10,483 \\ -10,483 & 11,608 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,175 & 0,158 \\ 0,158 & 0,229 \end{bmatrix}$$

Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß das Linksprodukt eines Zeilenvektors mit einer Matrix wiederum einen Zeilenvektor ergibt, der, mit einem Spaltenvektor multipliziert, zu einem Skalar, also einer reellen Zahl führt, erhält man nach Einsetzen der errechneten Werte in die Gleichung der Prüfgröße :

$$Y^2 = 2,149 - 1,596 = 0,553 .$$

Dieser Wert der Prüfgröße läßt, da

$$(Y^2 = 0,553) < (\chi^2_{c(2;0,05)} = 5,99),$$

darauf schließen, daß die Nullhypothese Gültigkeit hat. Das Geschlecht der Konsumenten übt also keinen spezifischen Einfluß auf die Beziehung zwischen der Präferenz für die formale beziehungsweise farbliche Gestaltung der Verpackung aus.

Wie bereits angedeutet, ist der Rechenaufwand bei größeren $2 \times c \times \ell$ -Kontingenztabellen erheblich,

vor allem die Inversion der Summenmatrix der $M^{(k)}$ ist sehr aufwendig. Aus diesem Grunde empfiehlt sich die Verwendung eines EDV-Programms.

5.2.4 Die Prüfung von Zusammenhängen höherer Ordnung in r × c × ℓ -Kontingenztafeln

Als letzte Erweiterungsmöglichkeit der Prüfung der Unabhängigkeit zweiter Ordnung soll nun der entsprechende Test im Falle einer Kontingenztafel vom Umfang $r \times c \times \ell$,$(r>2, c>2, \ell>2)$, dargestellt werden.

In einer derartigen dreidimensionalen Kontingenztabelle findet sich in der k-ten Schicht eine zweidimensionale Kontingenztabelle vom Umfang $r \times c$. Ziel des Tests auf Unabhängigkeit zweiter Ordnung muß es sein, für diese Kontingenztabelle ein Maß für die einfache Unabhängigkeit zwischen den Merkmalen I und J zu finden und diese Maße mit denen der anderen Schichten zu vergleichen. Die Größe der Maßzahl der einfachen Unabhängigkeit der k-ten Schicht darf dabei nicht signifikant von den entsprechenden Maßzahlen der anderen Schichten abweichen, wenn die Nullhypothese der Unabhängigkeit zweiter Ordnung Gültigkeit haben soll.

In Analogie zu den bisherigen Ausführungen soll die einfache Unabhängigkeit zwischen den Merkmalen I und J in Form von $(r-1)\cdot(c-1)$ Kreuzproduktkoeffizienten $\Delta_{\tilde{i}\tilde{j}k}$ angegeben werden, wobei

$$\Delta_{\tilde{i}\tilde{j}k} = \frac{\pi_{\tilde{i}\tilde{j}k} \cdot \pi_{rck}}{\pi_{\tilde{i}ck} \cdot \pi_{r\tilde{j}k}} \quad \begin{array}{l} \text{für } \tilde{i}=1,2,\ldots,(r-1) \\ \quad\; \tilde{j}=1,2,\ldots,(c-1) \\ \text{bei } k=1,2,\ldots,\ell \end{array} \qquad (5.2.4\text{-}1).$$

Das bedeutet, daß sich aus jeder zweidimensionalen r × c -Kontingenztabelle der ℓ Schichten (r-1)·(c-1) Kontingenztabellen vom Umfang 2 × 2 bilden lassen, für die die Kreuzproduktkoeffizienten Δ_{ijk} bestimmbar sind. Findet man zum Beispiel in der k-ten Schicht einer dreidimensionalen Kontingenztabelle die folgende 3 × 4 -Tafel :

I \ J	J_1	J_2	J_3	J_4
I_1	n_{11k}	n_{12k}	n_{13k}	n_{14k}
I_2	n_{21k}	n_{22k}	n_{23k}	n_{24k}
I_3	n_{31k}	n_{32k}	n_{33k}	n_{34k}

,

so lassen sich aus dieser die in Tab. 26 wiedergegebenen (3-1)·(4-1) = 6 Tabellen vom Umfang 2 × 2 bilden.

Tab. 26 : Aufteilungsmöglichkeiten einer 3 × 4 Kontingenztabelle in 6 Kontingenztabellen vom Umfang 2 × 2

I \ J	J_1	J_2	J_3	J_4	
I_1	n_{11k}			n_{14k}	
I_2					$\rightarrow \Delta_{11k}$
I_3	n_{31k}			n_{34k}	

I \ J	J_1	J_2	J_3	J_4	
I_1		n_{12k}		n_{14k}	
I_2					$\rightarrow \Delta_{12k}$
I_3		n_{32k}		n_{34k}	

I \ J	J_1	J_2	J_3	J_4	
I_1			n_{13k}	n_{14k}	
I_2					$\rightarrow \Delta_{13k}$
I_3			n_{33k}	n_{34k}	

I \ J	J_1	J_2	J_3	J_4	
I_1					
I_2	n_{21k}			n_{24k}	$\rightarrow \Delta_{21k}$
I_3	n_{31k}			n_{34k}	

I \ J	J_1	J_2	J_3	J_4	
I_1					
I_2		n_{22k}		n_{24k}	$\rightarrow \Delta_{22k}$
I_3		n_{32k}		n_{34k}	

I \ J	J_1	J_2	J_3	J_4	
I_1					
I_2			n_{23k}	n_{24k}	$\rightarrow \Delta_{23k}$
I_3			n_{33k}	n_{34k}	

Alle $\Delta_{\tilde{i}\tilde{j}k}$ der k-ten Schicht messen zusammen die einfache Zweifachabhängigkeit der r × c -Kontingenztabelle der Merkmale I und J. Stellt man die $\Delta_{\tilde{i}\tilde{j}k}$ für jede Schicht als Spaltenvektor dar, kann man die Hypothese der Unabhängigkeit zweiter Ordnung definieren als

$$H_o: \begin{Bmatrix} \Delta_{111} \\ \Delta_{121} \\ \vdots \\ \Delta_{211} \\ \Delta_{221} \\ \vdots \\ \Delta_{(r-1)(c-1)1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_{112} \\ \Delta_{122} \\ \vdots \\ \Delta_{212} \\ \Delta_{222} \\ \vdots \\ \Delta_{(r-1)(c-1)2} \end{Bmatrix} = \ldots = \begin{Bmatrix} \Delta_{11\ell} \\ \Delta_{12\ell} \\ \vdots \\ \Delta_{21\ell} \\ \Delta_{22\ell} \\ \vdots \\ \Delta_{(r-1)(c-1)\ell} \end{Bmatrix}$$

(5.2.4-2).

Führt man wie oben die logarithmische Transformation

$$\ln(\Delta_{\tilde{i}\tilde{j}k}) = \Gamma_{\tilde{i}\tilde{j}k} \qquad (5.2.4\text{-}3)$$

durch, ergibt sich die Nullhypothese entsprechend. Definiert man $\Gamma_{\tilde{i}.k}$ als Spaltenvektor mit (c-1) Elementen,

$$\Gamma_{\tilde{i}.k} = \begin{Bmatrix} \Gamma_{\tilde{i}11} \\ \Gamma_{\tilde{i}2k} \\ \vdots \\ \Gamma_{\tilde{i}(c-1)k} \end{Bmatrix} \qquad (5.2.4\text{-}4),$$

und zusätzlich

$$\Gamma_{..k} = \begin{Bmatrix} \Gamma_{1.k} \\ \Gamma_{2.k} \\ \vdots \\ \Gamma_{(r-1).k} \end{Bmatrix} \qquad (5.2.4\text{-}5),$$

so läßt sich die Nullhypothese auch ausdrücken als

$$H_o : \Gamma_{..1} = \Gamma_{..2} = \ldots = \Gamma_{..\ell} \qquad (5.2.4\text{-}6).$$

Diese Hypothese läßt sich mit folgendem multivariaten Verfahren prüfen : Man schätzt

$$\Delta_{\tilde{i}\tilde{j}k} \text{ durch } d_{\tilde{i}\tilde{j}k} = \frac{n_{\tilde{i}\tilde{j}k}\, n_{rck}}{n_{\tilde{i}ck}\, n_{r\tilde{j}k}} \quad \begin{matrix} \text{für } \tilde{i}=1,2,\ldots,(r-1) \\ \tilde{j}=1,2,\ldots,(c-1) \\ \text{bei } k=1,2,\ldots,\ell \end{matrix} \qquad (5.2.4\text{-}7),$$

$$\Gamma_{\tilde{i}.k} \text{ durch } g_{\tilde{i}.k} = \begin{Bmatrix} g_{\tilde{i}1k} \\ g_{\tilde{i}2k} \\ \vdots \\ g_{\tilde{i}(c-1)k} \end{Bmatrix} \qquad (5.2.4\text{-}8)$$

und

$$\Gamma_{..k} \text{ durch } g_{..k} = \begin{Bmatrix} g_{1.k} \\ g_{2.k} \\ \vdots \\ g_{(r-1).k} \end{Bmatrix} \qquad (5.2.4\text{-}9).$$

Dabei gilt, daß die Verteilung der $g_{..k}$ asymptotisch multivariat-normal ist.

Definiert man die Varianz-Kovarianz-Matrix der $g_{..k}$ als $T^{(k)}$, wobei $T^{(k)}$ eine quadratische Matrix vom Umfang $\{(r-1)\cdot(c-1)\}\times\{(r-1)\cdot(c-1)\}$ ist, so läßt sich $T^{(k)}$ schätzen durch die Matrix $U..^{(k)}$, die auf den beobachteten Werten basiert und wie oben durch Inversion der Matrix $M..^{(k)}$ berechnet werden kann. Bei Anwendung der Theorie der multivariaten Normalverteilung läßt sich zeigen[1)], daß die Prüf-

1 Vgl.: GOODMAN, L. A.: Simple methods ..., a.a.O., S. 339.

größe für die Hypothese der Unabhängigkeit zweiter Ordnung

$$Y^2 = \sum_{k=1}^{\ell} g'_{..k} \cdot M_{..}^{(k)} \cdot g_{..k} - \tilde{g}'_{..} \cdot Q_{..} \cdot \tilde{g}_{..} \qquad (5.2.4\text{-}10)$$

annähernd χ^2-verteilt ist mit $\nu = (r-1)\cdot(c-1)\cdot(\ell-1)$ Freiheitsgraden. Diese Prüfgröße stellt eine Erweiterung der Prüfgröße (5.2.3-11) für $2 \times c \times \ell$ -Kontingenztabellen dar.

Die einzelnen Elemente der Prüfgröße Y^2 sind wie folgt definiert :

$$\tilde{g}_{..} = \sum_{k=1}^{\ell} M_{..}^{(k)} \cdot g_{..k} \qquad (5.2.4\text{-}11).$$

$$Q_{..} = \left[\sum_{k=1}^{\ell} M_{..}^{(k)} \right]^{-1} \qquad (5.2.4\text{-}12).$$

$g'_{..k}$ ist der transponierte Vektor zu $g_{..k}$ gemäß Gleichung (5.2.4-9) und $\tilde{g}'_{..}$ ist der transponierte Vektor zu $\tilde{g}_{..}$ gemäß Gleichung (5.2.4-11).

Die Matrizen $M_{..}^{(k)}$ lassen sich direkt aus den beobachteten Daten ermitteln. Dabei gilt :

$$M_{..}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mu_{11}^{(k)} & \mu_{12}^{(k)} & \dots & \mu_{1(r-1)}^{(k)} \\ \mu_{21}^{(k)} & & \dots & \mu_{2(r-1)}^{(k)} \\ \vdots & & & \\ \mu_{(r-1)1}^{(k)} & & \dots & \mu_{(r-1)(r-1)}^{(k)} \end{bmatrix}$$

(5.2.4-13),

wobei

$$\left.\begin{aligned} \mu_{\tilde{i}h}^{(k)} &= -B_{\tilde{i}}^{(k)} \cdot D^{(k)} \cdot B_h^{(k)} \qquad \tilde{i} \neq h \\ \mu_{\tilde{i}\tilde{i}}^{(k)} &= B_{\tilde{i}}^{(k)} - \left[B_{\tilde{i}}^{(k)} \cdot D^{(k)} \cdot B_{\tilde{i}}^{(k)}\right]_{\tilde{i}=\tilde{i}} \end{aligned}\right\} \tilde{i},h=1,2,\ldots,(r-1)$$

(5.2.4-14)

(5.2.4-15).

$B_{\tilde{i}}^{(k)}$ ist eine quadratische Matrix vom Umfang $(c-1)\times(c-1)$, die wie folgt definiert ist :

$$B_{\tilde{i}}^{(k)} = \begin{bmatrix} \beta_{11}^{(\tilde{i}k)} & \beta_{12}^{(\tilde{i}k)} & \cdots & \beta_{1(c-1)}^{(\tilde{i}k)} \\ \beta_{21}^{(\tilde{i}k)} & \beta_{22}^{(\tilde{i}k)} & & \beta_{2(c-1)}^{(\tilde{i}k)} \\ \vdots & & & \\ \beta_{(c-1)1}^{(\tilde{i}k)} & & & \beta_{(c-1)(c-1)}^{(\tilde{i}k)} \end{bmatrix}$$

(5.2.4-16).

$B_{\tilde{i}}^{(k)}$ hat die Elemente

$$\beta_{\tilde{j}h}^{(\tilde{i}k)} = -\frac{\beta_{\tilde{j}}^{(\tilde{i}k)} \cdot \beta_h^{(\tilde{i}k)}}{\beta^{(\tilde{i}k)}} \qquad \text{(5.2.4-17)}$$

und

$$\beta_{\tilde{j}\tilde{j}}^{(\tilde{i}k)} = \beta_{\tilde{j}}^{(\tilde{i}k)} \cdot \left[1 - \frac{\beta_{\tilde{j}}^{(\tilde{i}k)}}{\beta^{(\tilde{i}k)}}\right] \qquad \text{(5.2.4-18)}$$

für $\tilde{i}=1,2,\ldots,(r-1)$, $\tilde{j}=1,2,\ldots,(c-1)$ bei $k=1,2,\ldots,$

Dabei berechnet man die $\beta_{\tilde{j}}^{(\tilde{i}k)}$ aus

$$\beta_{\tilde{j}}^{(\tilde{i}k)} = n_{\tilde{i}\tilde{j}k} \qquad \text{(5.2.4-19)}$$

und

$$\beta^{(\tilde{i}k)} = \left[\beta_c^{(\tilde{i}k)} + \sum_{\tilde{j}=1}^{c-1} \beta_{\tilde{j}}^{(\tilde{i}k)}\right] \qquad \text{(5.2.4-20)}$$

und

$$\beta_c^{(\tilde{ik})} = n_{\tilde{ick}} \qquad (5.2.4\text{-}21).$$

Weiterhin ist

$$D^{(k)} = \left[B_r^{(k)} + \sum_{\tilde{i}=1}^{r-1} B_{\tilde{I}}^{(k)} \right]^{-1} \qquad (5.2.4\text{-}22).$$

Dieses recht komplizierte Testverfahren soll nun anhand eines Modellbeispiels 4 näher erläutert werden[1]. Eine landwirtschaftliche Genossenschaft habe festgestellt, daß der Verkaufserfolg ihrer verschiedenen Milchprodukte (Merkmal I) nicht abhängig ist von der Art der angebotenen Verpackung[2] (Merkmal J). Es ist von Interesse festzustellen, ob diese Unabhängigkeit beeinflußt wird von der regionalen Verteilung der Käufer der Milchprodukte (Merkmal K).

In einer Zufallsstichprobe seien die in Tab. 27 wiedergegebenen Verkaufshäufigkeiten von 1-Liter-Mengen Milch beobachtet worden.

Zu prüfen ist die Nullhypothese : Es besteht Unabhängigkeit zweiter Ordnung zwischen der regionalen Verteilung der Käufer, der Art der Milchverpackung und der Milchsorte.

---

1 Da sich in der Literatur wegen des hohen Rechenaufwandes keine Zahlenbeispiele finden, hat der Verfasser das vorliegende Beispiel mit Hilfe von elektronischen Rechenmaschinen ausgewertet, um alle Rechenschritte detailliert darstellen zu können und um eine Grundlage für ein entsprechendes EDV-Programm zu erhalten. Alle Berechnungen wurden mit 8-stelliger Genauigkeit durchgeführt.

2 Ein entsprechender zweidimensionaler Test führt zu $\chi^2 = 5{,}657$. Dieser Wert ist bei den vorliegenden 4 Freiheitsgraden nicht signifikant.

Tab. 27 : Verkaufshäufigkeiten von 1-Liter-Mengen Milch

Region / Verpackungsart*) / Milchsorte	I			II			III		
	u	P	S	u	P	S	u	P	S
Frischmilch	20	20	10	20	40	40	30	50	20
H-Milch	40	20	20	20	40	20	20	30	50
Buttermilch	20	60	20	40	40	20	20	20	60

*)Erläuterungen der Verpackungsarten :

u = unverpackte Milch

P = Milch in Pappschachteln

S = Milch in Schlauchbeuteln

Unter Gültigkeit der Nullhypothese ist die Prüfgröße

$$Y^2 = \sum_{k=1}^{\ell} g'_{..k} \cdot M_{..}^{(k)} \cdot g_{..k} - \tilde{g}'_{..} \cdot Q_{..} \cdot \tilde{g}_{..}$$

annähernd χ^2-verteilt mit $\nu = 8$ Freiheitsgraden. Man erhält :

$$g_{..1} = \begin{Bmatrix} g_{1.1} \\ g_{2.1} \end{Bmatrix} \qquad g_{1.1} = \begin{Bmatrix} g_{111} \\ g_{121} \end{Bmatrix} \qquad g_{2.1} = \begin{Bmatrix} g_{211} \\ g_{221} \end{Bmatrix}$$

$$g_{111} = \ln(n_{111}) + \ln(n_{331}) - \ln(n_{131}) - \ln(n_{311})$$
$$g_{111} = \ln(20) + \ln(20) - \ln(10) - \ln(20) = 0{,}6931$$

$$g_{121} = \ln(n_{121}) + \ln(n_{331}) - \ln(n_{131}) - \ln(n_{321})$$
$$g_{121} = \ln(20) + \ln(20) - \ln(10) - \ln(60) = -0{,}4055$$

$$g_{211} = \ln(n_{211}) + \ln(n_{331}) - \ln(n_{231}) - \ln(n_{311})$$
$$g_{211} = \ln(40) + \ln(20) - \ln(20) - \ln(20) = 0{,}6931$$

$$g_{221} = \ln(n_{221})+\ln(n_{331})-\ln(n_{231})-\ln(n_{321})$$
$$g_{221} = \ln(20)+\ln(20)-\ln(20)-\ln(60) = -1,0986$$

Daraus folgt

$$g_{..1}=\begin{Bmatrix} 0,6931 \\ -0,4055 \\ 0,6931 \\ -1,0986 \end{Bmatrix} \quad \text{und} \quad g'_{..1}=\{0,6931 \ -0,4055 \ 0,6931 \ -1,0986\}$$

Analog erhält man

$$g_{..2}=\begin{Bmatrix} -1,3864 \\ -0,6931 \\ -0,6931 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{und} \quad g'_{..2}=\{-1,3864 \ -0,6931 \ -0,6931 \ 0\}$$

$$g_{..3}=\begin{Bmatrix} 1,5041 \\ 2,0149 \\ 0,1823 \\ 0,5878 \end{Bmatrix} \quad \text{und} \quad g'_{..3}=\{1,5041 \ 2,0149 \ 0,1823 \ 0,5878\}$$

Die Matrizen $M_{..}^{(k)}$ haben hier das Format 2×2 und sind definiert als

$$M_{..}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mu_{11}^{(k)} & \mu_{12}^{(k)} \\ \mu_{21}^{(k)} & \mu_{22}^{(k)} \end{bmatrix}$$

Zur Bestimmung der Matrix $M_{..}^{(1)}$ benötigt man die Elemente $\mu_{\tilde{j}h}^{(1)}$, zu deren Bestimmung die Matrizen $B_{\tilde{i}}^{(1)}$ und $D^{(1)}$ berechnet werden müssen.

$$B_{\tilde{i}}^{(1)} = \begin{bmatrix} \beta_{11}^{(\tilde{i}1)} & \beta_{12}^{(\tilde{i}1)} \\ \beta_{21}^{(\tilde{i}1)} & \beta_{22}^{(\tilde{i}1)} \end{bmatrix} \quad \tilde{i}=1,2$$

$$D^{(1)} = \left[B_3^{(1)} + \sum_{\tilde{i}=1}^{2} B_{\tilde{i}}^{(1)}\right]^{-1}$$

Die Einzelberechnung soll exemplarisch für die Matrix $B_1^{(1)}$ angegeben werden. Gemäß Gleichung (5.2.4-17) beziehungsweise (5.2.4-18) gilt :

$$\beta_{11}^{(11)} = \beta_1^{(11)} \cdot \left[1 - \frac{\beta_1^{(11)}}{\beta^{(11)}}\right]$$

$$\beta_{22}^{(11)} = \beta_2^{(11)} \cdot \left[1 - \frac{\beta_2^{(11)}}{\beta^{(11)}}\right]$$

$$\beta_{12}^{(11)} = \beta_{21}^{(11)} = -\frac{\beta_1^{(11)} \cdot \beta_2^{(11)}}{\beta^{(11)}}$$

$\beta_1^{(11)} = n_{111} = 20 \quad \beta_2^{(11)} = n_{121} = 20 \quad \beta_3^{(11)} = n_{131} = 10$

Damit ist gemäß Gleichung (5.2.4-20):

$$\beta^{(11)} = 20+20+10 = 50,$$

und damit erhält man

$$\beta_{11}^{(11)} = 12 \quad \beta_{22}^{(11)} = 12 \quad \beta_{12}^{(11)} = -8 .$$

Setzt man ein, so erhält man :

$$B_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ -8 & 12 \end{bmatrix}$$

In der gleichen Weise kann man berechnen :

$$B_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 15 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 24 \end{bmatrix} .$$

Mit diesen Ergebnissen läßt sich $D^{(1)}$ ermitteln :

$$D^{(1)} = \begin{bmatrix} 48 & -30 \\ -30 & 51 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}0329 & 0{,}0194 \\ 0{,}0194 & 0{,}0310 \end{bmatrix}$$

Eingesetzt in die Bestimmungsgleichung der $\mu_{jh}^{(1)}$ ergibt sich dann :

$$\mu_{21}^{(1)} = -B_2^{(1)} \cdot D^{(1)} \cdot B_1^{(1)} = \begin{bmatrix} -4,9612 & 2,7907 \\ 2,6357 & -3,5659 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{12}^{(1)} = -B_1^{(1)} \cdot D^{(1)} \cdot B_2^{(1)} = \begin{bmatrix} -4,9612 & 2,6357 \\ 2,7907 & -3,5659 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{11}^{(1)} = B_1^{(1)} - \left[B_1^{(1)} \cdot D^{(1)} \cdot B_1^{(1)}\right] = \begin{bmatrix} 8,9225 & -5,8915 \\ -5,8915 & 9,1473 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{22}^{(1)} = B_2^{(1)} - \left[B_2^{(1)} \cdot D^{(1)} \cdot B_2^{(1)}\right] = \begin{bmatrix} 11,4729 & -6,5116 \\ -6,5116 & 10,5426 \end{bmatrix}$$

Setzt man diese Werte in $M..^{(1)}$ ein, erhält man :

$$M..^{(1)} = \begin{bmatrix} 8,9925 & -5,8915 & -4,9612 & 2,6357 \\ -5,8915 & 9,1473 & 2,7907 & -3,5659 \\ -4,9612 & 2,7907 & 11,4729 & -6,5116 \\ 2,6357 & -3,5659 & -6,5116 & 10,5426 \end{bmatrix}$$

Analog wird errechnet :

$$M..^{(2)} = \begin{bmatrix} 11,2693 & -6,4396 & -4,3344 & 2,3529 \\ -6,4396 & 15,1084 & 2,4768 & -7,0588 \\ -4,3344 & 2,4768 & 10,8978 & -7,0588 \\ 2,3529 & -7,0588 & -7,0588 & 14,1176 \end{bmatrix}$$

$$M..^{(3)} = \begin{bmatrix} 12,1623 & -7,2379 & -6,1826 & 4,2210 \\ -7,2379 & 14,3555 & 3,9760 & -8,1849 \\ -6,1826 & 3,9760 & 11,1221 & -4,7486 \\ 4,2210 & -8,1849 & -4,7486 & 13,7452 \end{bmatrix}$$

Aus der Summation der Matrizen $M..^{(1)}$, $M..^{(2)}$ und $M..^{(3)}$ ergibt sich eine Summenmatrix, deren inver-

tierte Matrix die Matrix

$$Q_{..} = \begin{bmatrix} 0{,}0566 & 0{,}0288 & 0{,}0250 & 0{,}0125 \\ 0{,}0288 & 0{,}0486 & 0{,}0124 & 0{,}0228 \\ 0{,}0250 & 0{,}0124 & 0{,}0515 & 0{,}0246 \\ 0{,}0125 & 0{,}0228 & 0{,}0246 & 0{,}0460 \end{bmatrix} \text{ ist.}$$

Gemäß Gleichung (5.2.4-11) erhält man schließlich

$$\tilde{g}_{..} = \sum_{k=1}^{3} M_{..}^{(k)} \cdot g_{..k} = \begin{Bmatrix} -0{,}8041 \\ 8{,}7500 \\ 5{,}2250 \\ -9{,}2289 \end{Bmatrix}$$

und

$$\tilde{g}'_{..} = \left\{ -0{,}8041 \quad 8{,}7500 \quad 5{,}2250 \quad -9{,}2289 \right\}$$

Setzt man diese Zwischenergebnisse in die Bestimmungsgleichung (5.2.4-10) für die Prüfgröße Y^2 ein, kann man berechnen :

$$Y^2 = 73{,}2220 - 3{,}7216 = 69{,}5004 \ .$$

Da $(Y^2 = 69{,}500) > (\chi^2_{c(8;0{,}05)} = 15{,}51)$, muß die Nullhypothese der Unabhängigkeit zweiter Ordnung verworfen werden. Die regionale Verteilung der Käufer beeinflußt die Beziehung zwischen dem Verkaufsergebnis der verschiedenen Milchprodukte und deren Verpackungsart.

In dem angeführten Modellbeispiel 4 ist deutlich ersichtlich, welche Dimensionen der Rechenaufwand bei Kontingenztabellen von größerem Umfang als $3 \times 3 \times 3$ annehmen muß. Derartiger Aufwand ist wirtschaftlich nur noch mit Datenverarbeitungsan-

lagen zu bewältigen. Aus diesem Grunde hat der Verfasser ein EDV-Programm für das GOODMAN'sche Verfahren in der allgemeinen Form entwickelt, das die Auswertung von Kontingenztabellen bis zum maximalen Umfang von $10 \times 10 \times 10$ ermöglicht. Eine Erweiterung dieses Programms auf noch mehr Merkmalsausprägungen ist ohne Schwierigkeiten möglich, die Durchführung der sich sodann ergebenden Rechenoperationen dürfte aber die Kernspeicherkapazität der meisten Rechenanlagen überschreiten beziehungsweise bei Auslagerung von Speicherkapazität wegen der erhöhten Zugriffszeiten die Rechenzeiten sehr erhöhen[1].

5.3 Das informationstheoretische Modell zur Bestimmung des Zusammenhangs höherer Ordnung zwischen nominalskalierten Merkmalen

Wesentlich einfacher, als mit Hilfe des zuletzt dargestellten GOODMAN'schen Verfahrens läßt sich die Hypothese der Unabhängigkeit höherer Ordnung im Rahmen des informationstheoretischen Modells überprüfen. Aus diesem Grunde erübrigt sich auch eine gesonderte Darstellung für Kontingenztabellen vom Umfang $2 \times 2 \times \ell$, $2 \times c \times \ell$ und $r \times c \times \ell$.

Ausgehend von der BARTLETT'schen Hypothese der Unabhängigkeit höherer Ordnung haben ROY und KASTENBAUM diese Hypothese auf den allgemeinen Fall einer $r \times c \times \ell$ -Kontingenztabelle erweitert[2]. In diesem Falle liegt Unabhängigkeit zweiter Ordnung dann vor, wenn sich die Eintrittswahrscheinlichkeit p_{ijk} für

1 Vgl. die Erläuterungen zu dem vom Verfasser entwickelten Programm zur Analyse der Zusammenhänge zweiter Ordnung im Anhang, S. 245 ff. .

2 Vgl.: ROY, S. N. und KASTENBAUM, M. A.: a.a.O., S. 750; DARROCH, J. N.: a.a.O., S. 253; VICTOR, N.: a.a.O., S. 26 ff. .

ein Feld der Kontingenztabelle ergibt als

$$p_{ijk} = \frac{p_{.jk} \cdot p_{i.k} \cdot p_{ij.}}{p_{i..} \cdot p_{.j.} \cdot p_{..k}} \qquad \forall_{ijk} \quad (5.3\text{-}1).$$

Da diese Gleichung den Nebenbedingungen

$$p_{.j.}\ p_{..k} = \sum_{i=1}^{r} \frac{p_{ij.} \cdot p_{i.k}}{p_{i..}} \qquad \forall_{jk} \quad (5.3\text{-}2)$$

$$p_{i..}\ p_{..k} = \sum_{j=1}^{c} \frac{p_{ij.} \cdot p_{.jk}}{p_{.j.}} \qquad \forall_{ik} \quad (5.3\text{-}3)$$

$$p_{i..}\ p_{.j.} = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{p_{i.k} \cdot p_{.jk}}{p_{..k}} \qquad \forall_{ij} \quad (5.3\text{-}4)$$

genügen muß[1], und da diese Nebenbedingungen mathematisch sehr restriktiv sind, wiesen ROY und KASTENBAUM nach[2], daß die Hypothese

$$p_{ijk} = \frac{q_{.jk} \cdot q_{i.k} \cdot q_{ij.}}{q_{i..} \cdot q_{.j.} \cdot q_{..k}} \qquad \forall_{ijk} \quad (5.3\text{-}5)$$

der Hypothese (5.3-1) entspricht, wobei die "q" beliebige reelle Zahlen darstellen[3], die den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^{c} q_{ij.} = \sum_{k=1}^{\ell} q_{i.k} = q_{i..} \qquad (5.3\text{-}6)$$

$$\sum_{i=1}^{r} q_{ij.} = \sum_{k=1}^{\ell} q_{.jk} = q_{.j.} \qquad (5.3\text{-}7)$$

$$\sum_{i=1}^{r} q_{i.k} = \sum_{j=1}^{c} q_{.jk} = q_{..k} \qquad (5.3\text{-}8)$$

---

1 Vgl. Hierzu : VICTOR, N.: a.a.O., S. 27 ff. .

2 Vgl. ROY, S. N. und KASTENBAUM, M. A.: a.a.O., S. 750 ff. .

3 Vgl.: VICTOR, N.: a.a.O., S 37 f. .

genügen müssen.

Setzt man anstelle der "q" in Gleichung (5.3-5) die entsprechenden beobachteten Randhäufigkeiten der zu analysierenden Kontingenztabelle, so erhält man Maximum-Likelihood-Schätzwerte für die p_{ijk} unter Gültigkeit der Hypothese der Unabhängigkeit zweiter Ordnung.

Unter Verwendung der allgemeinen informationstheoretischen Prüfgröße, wie sie in Gleichung (4.3.1-22) definiert wurde[1)], ergibt sich dann die Prüfgröße $2\hat{I}_{(2)}$ zur Prüfung der Hypothese der Unabhängigkeit zweiter Ordnung als

$$2\hat{I}_{(2)} = 2 \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \sum_{k=1}^{\ell} n_{ijk} \cdot \ln \left[\frac{n_{ijk}}{n \cdot \frac{n_{ij.} \cdot n_{i.k} \cdot n_{.jk}}{n_{i..} \cdot n_{.j.} \cdot n_{..k}}} \right] \qquad (5.3\text{-}9),$$

die man umformen kann zu

$$2\hat{I}_{(2)} = 2 \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \sum_{k=1}^{\ell} n_{ijk} \cdot \ln \left[\frac{n_{ijk} \cdot n_{i..} \cdot n_{.j.} \cdot n_{..k}}{n \cdot n_{ij.} \cdot n_{i.k} \cdot n_{.jk}} \right] \qquad (5.3\text{-}10).$$

Mittels dieser Prüfgröße läßt sich die Abweichung der beobachteten Verteilung der Merkmalswerte von der Verteilung der Merkmalswerte unter Gültigkeit der Nullhypothese der Unabhängigkeit zweiter Ordnung bestimmen.

---

1 Vgl. auch die analoge Definition bei : KULLBACK, S.: Information theory ... , a.a.O., S. 171 f. .

Die Signifikanz der Größe $2\hat{I}_{(2)}$ ergibt sich aus der Anwendung der χ^2-Verteilung mit $\nu = (r-1)\cdot(c-1)\cdot(\ell-1)$ Freiheitsgraden[1]. Die Anwendbarkeit des Prüfverfahrens hängt dann nur von der Erfüllung der Nebenbedingungen (5.3-6), (5.3-7) und (5.3-8) ab[2], die jedoch bei normalen Beobachtungsergebnissen in der Praxis gegeben sein dürfte.

Für die praktische Berechnung empfiehlt es sich, die Prüfgröße $2\hat{I}_{(2)}$ weiter umzuformen in

$$
\begin{aligned}
2\hat{I}_{(2)} = {} & \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{\ell} 2n_{ijk}\cdot\ln(n_{ijk}) + \sum_{i=1}^{r} 2n_{i..}\cdot\ln(n_{i..}) \\
& + \sum_{j=1}^{c} 2n_{.j.}\cdot\ln(n_{.j.}) + \sum_{k=1}^{\ell} 2n_{..k}\cdot\ln(n_{..k}) \\
& - 2n\cdot\ln(n) - \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} 2n_{ij.}\cdot\ln(n_{ij.}) \\
& - \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{\ell} 2n_{i.k}\cdot\ln(n_{i.k}) - \sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{\ell} 2n_{.jk}\cdot\ln(n_{.jk})
\end{aligned}
\qquad (5.3\text{-}11),
$$

um die Verwendung der in Tabelle 1 des Anhangs wiedergegebenen Werte von $2n\cdot\ln(n)$ zu ermöglichen.

Berechnet man nach Gleichung (5.3-11) die Prüfgröße $2\hat{I}_{(2)}$ für das Demonstrationsbeispiel 1[3], so erhält man

$$2\hat{I}_{(2)} = 15{,}6597 .$$

Da $(2\hat{I}_{(2)} = 15{,}6597) > (\chi^2_{c(1;0,05)} = 3{,}84)$, muß die

---

1 Vgl.: KULLBACK, S., KUPPERMAN, M. und KU, H. H.: An application ... , a.a.O., S. 218 .

2 KULLBACK erwähnt dies nie ausdrücklich, was GOODMAN zur Kritik veranlaßt, vgl.: GOODMAN, L. A.: The analysis of multidimensional contingency tables : stepwise procedures and direct estimation methods for building models for multiple classifications, Technometrics 13 (1971), S. 58 f. .

3 Vgl.die Erläuterungen zu Modellbeispiel 1 auf S.24 ff..

Nullhypothese der Unabhängigkeit zweiter Ordnung zwischen den Merkmalen "Rechtsform der Unternehmen", "Gewinnentwicklung" und "Durchführung der Mitbestimmung" abgelehnt werden.

Ein Vergleich dieses Ergebnisses mit dem oben errechneten Wert der GOODMAN-Prüfgröße Y^2 für Beispiel 1, $Y^2 = 19{,}247$, zeigt, daß beide Tests gleichermaßen zur Ablehnung der Nullhypothese führen. Ermittelt man die Prüfgrößen $2\hat{I}_{(2)}$ für die anderen bisher betrachteten Modellbeispiele, so erhält man die Ergebnisübersicht in Tab. 25[1].

Tab. 28 : Ergebnisübersicht der Tests auf Unabhängigkeit zweiter Ordnung für die Modellbeispiele 1, 2, 3 und 4[2]

Beispiel Nr.	$2\hat{I}_{(2)}$	Y^2	Testergebnis
1	15,6597	19,247	H_o wird abgelehnt
2	17,4084	16,194	H_o wird abgelehnt
3	0,5498	0,554	H_o wird beibehalten
4	75,3974	69,500	H_o wird abgelehnt

Auf eine Besonderheit bei der Ermittlung der Prüfgröße $2\hat{I}_{(2)}$ soll abschließend noch hingewiesen werden[3]. Bei bestimmten Datenkonstellationen ist es möglich, daß die Prüfgröße $2\hat{I}_{(2)}$ negative Werte annimmt. So ergibt sich zum Beispiel für die dreidimensionale Kontingenztabelle

K / J / I	K_1		K_2	
	J_1	J_2	J_1	J_2
I_1	10	0	0	0
I_2	0	0	0	990

1 Die Berechnungen der Prüfgrößen $2I_{(2)}$ erfolgten im Rahmen des oben angesprochenen Computerprogramms.

2 Vgl. die Erläuterungen zu den Beispielen auf den S. 24 ff., S. 161 ff., S. 170 ff. und S. 179 ff. .

3 Vgl.: KULLBACK, S.: Information theory...,a.a.O., S. 172 .

ein Testergebnis von $2\hat{I}_{(2)} = -112{,}031$, während bei Anwendung des GOODMAN'schen Verfahrens $Y^2=209{,}038$ resultiert. KULLBACK erklärt dies daraus[1], daß die Unabhängigkeit höherer Ordnung im informationstheoretischen Modell der Analyse nominalskalierter Daten interpretiert werden kann als Differenz zwischen der gemeinsamen Homogenität zweier Merkmale und der bedingten Homogenität dieser beiden Merkmale bezogen auf das dritte Merkmal[2]. Da diese Differenz nicht immer zu positiven Ergebnissen führen muß, kann die Prüfgröße der Unabhängigkeit höherer Ordnung negativ werden.

Da aber die Unabhängigkeit höherer Ordnung, dargestellt in Form der Prüfgröße $2\hat{I}_{(k)}$, $k=2,3,\ldots,\ell$, den Differenz-B e t r a g zwischen den beiden Homogenitätsausprägungen ausmacht, kann zur Signifikanzprüfung eines Tests auf Unabhängigkeit höherer Ordnung dessen Ergebnis in absoluter Größe verwandt werden.

5.4 Die Ermittlung von Koeffizienten des Zusammenhangs höherer Ordnung

Analog zu Abschnitt 4.4 soll nun untersucht werden, ob sich auch die Stärke einer Abhängigkeit höherer Ordnung in Form eines Zusammenhangskoeffizienten darstellen läßt. GOODMAN definiert einen solchen Koeffizienten unter Verwendung der jeweiligen Kreuzproduktverhältnisse Γ_1 und Γ_2 zum Beispiel für den Fall einer $2 \times 2 \times 2$ -Kontingenztabelle als[3]

---

1 Vgl.: KULLBACK, S.: Information theory..., a.a.O., S. 172.

2 Vgl. auch McGILL, W. J.: a.a.O., S. 108.

3 Siehe : GOODMAN, L. A.: Simple methods ..., a.a.O., S. 340 ff. .

$$A = \Gamma_1 - \Gamma_2 \qquad (5.4\text{-}1)$$

und den entsprechenden Maximum-Likelihood-Schätzwert als[1)]

$$a = g_1 - g_2 = \ln \left[\frac{n_{111} \cdot n_{221}}{n_{121} \cdot n_{211}} : \frac{n_{112} \cdot n_{222}}{n_{122} \cdot n_{212}} \right] \qquad (5.4\text{-}2).$$

Berechnet man diesen Koeffizienten für das bisher mehrfach verwandte Modellbeispiel 1[2)], so erhält man

$$a = -1{,}226 \ .$$

Da dieser Koeffizient nicht den üblichen Bedingungen von Zusammenhangskoeffizienten genügt, nur Werte zwischen -1 und +1 beziehungsweise zwischen 0 und +1 anzunehmen, und da Obergrenzen beziehungsweise Untergrenzen der Größe des Koeffizienten a nicht angegeben werden können, ist er wegen der fehlenden Vergleichbarkeit zu den Ergebnissen anderer Tests nur von untergeordneter Bedeutung. Da zudem die Interpretation des Koeffizienten a schwierig ist, soll auf ihn nicht näher eingegangen werden.

Aufgrund der Konstruktion des informationstheoretischen Tests auf Unabhängigkeit höherer Ordnung ist die Ableitung eines entsprechenden Zusammenhangskoeffizienten nicht möglich. Aus diesem Grunde kann man davon ausgehen, daß für die Prüfung der Stärke der Abhängigkeit höherer Ordnung keine den üblichen Kontingenzkoeffizienten vergleichbaren Koeffizienten nachgewiesen werden können.

---

1 GOODMAN hat zudem auch den Nachweis von Konfidenzintervallen für den Koeffizienten A geführt, Vgl.: GOODMAN, L. A.: Simple methods ... , a.a.O., S. 340 ff. .

2 Vgl. die Erläuterungen zu Modellbeispiel 1 auf S. 24 ff. .

5.5 Anwendungsbeispiele für die Bestimmung von Zusammenhängen höherer Ordnung zwischen nominalskalierten Merkmalen

5.5.1 Vorbemerkungen

Im Rahmen des Abschnittes 5.5 soll die Ermittlung von Prüfgrößen für die Tests auf Unabhängigkeit höherer Ordnung für die in Abschnitt 4.5 vorgestellten Anwendungsbeispiele durchgeführt werden. Der Verfasser verzichtet bewußt auf die Wiedergabe weiterer Beispiele, da im Rahmen der Abhandlungen zu den Testverfahren für die Hypothese der Unabhängigkeit höherer Ordnung mehrere Beispiele erläutert wurden und die Anführung weiterer Ergebnisse nichts wesentlich Neues zum weitergehenden Verständnis dieser Verfahren beitragen könnte.

5.5.2 Die Prüfung des Zusammenhangs zweiter Ordnung zwischen dem Herkunftsland, der gewählten Studienrichtung und dem gewählten Studienort in Nordrhein-Westfalen von deutschen Studienanfängern im Wintersemester 1970/71

Wie in Unterabschnitt 5.2.4 ausgeführt wurde, ist der Rechenaufwand bei der Analyse der Unabhängigkeit zweiter Ordnung im Rahmen des Verfahrens von GOODMAN so erheblich, daß das entsprechende EDV-Programm des Verfassers auf $10 \times 10 \times 10$ -Merkmalsausprägungen beschränkt werden mußte. Da das in Unterabschnitt 4.5.2 angeführte Demonstrationsbeispiel die Studenten aus 11 deutschen Bundesländern untersucht, ergibt sich hier eine Kollision mit den Möglichkeiten und Grenzen dieses EDV-Programms. Aus

diesem Grund hat der Verfasser die Studienanfänger aus Schleswig-Holstein und Hamburg für die Berechnung zu einer Gruppe zusammengefaßt, während bei Anwendung des informationstheoretischen Verfahrens die Analyse der unveränderten Kontingenztabelle möglich ist. Aus der Analyse der Unabhängigkeit zweiter Ordnung zwischen den Merkmalen "Herkunftsland", "gewählter Fachrichtung" und "besuchter Universität in Nordrhein-Westfalen" ergab sich für die 11.213 Studienanfänger des Wintersemesters 1970/71 ein Wert der Prüfgröße von

$$Y^2 = 277{,}933 \quad \text{bei 216 Freiheitsgraden}$$

beziehungsweise

$$2\hat{I}_{(2)} = 317{,}297 \quad \text{bei 240 Freiheitsgraden.}$$

Ermittelt man $2\hat{I}_{(2)}$ für die gleiche Datenmatrix, wie sie der Berechnung von Y^2 zugrunde liegt, erhält man

$$2\hat{I}_{(2)} = 298{,}171 \quad \text{bei 216 Freiheitsgraden.}$$

Im Falle des GOODMAN-Tests ergibt sich für die Signifikanzprüfung von Y^2 ein Wert der standardnormalverteilten Prüfgröße von $z = 2{,}77$, im Falle des $2\hat{I}_{(2)}$-Tests von $z = 3{,}24$ beziehungsweise $z = 3{,}57$. Deshalb folgt aus beiden Tests auf Unabhängigkeit höherer Ordnung , daß die Nullhypothese für die beobachteten Merkmale abzulehnen ist.

5.5.3 Die Prüfung des Zusammenhangs zweiter Ordnung zwischen der verwaltungsmäßigen Gliederung, dem Bruttoinlandsprodukt und der Anzahl von Gymnasiasten pro 1000 der Bevölkerung für die 90 Kreise Nordrhein-Westfalens

Führt man die Analyse der Unabhängigkeit zweiter Ordnung für die in Unterabschnitt 4.5.3 angeführten Daten der 90 Kreise Nordrhein-Westfalens durch, so ergibt sich

$$Y^2 = 2{,}280$$

beziehungsweise

$$2\hat{I}_{(2)} = 8{,}184 \ .$$

Da

$$(\chi^2_{c(9;0{,}05)} = 16{,}92) > \begin{cases} (Y^2 = 2{,}280) \\ (2\hat{I}_{(2)} = 8{,}184) \end{cases} ,$$

muß davon ausgegangen werden, daß Unabhängigkeit zweiter Ordnung vorliegt. Keines der drei Merkmale beeinflußt nachweisbar die Beziehungen zwischen den übrigen beiden Merkmalen.

6 MÖGLICHKEITEN DER WEITERFÜHRUNG DER ANGEFÜHRTEN VERFAHREN ZUR BEURTEILUNG VON ZUSAMMENHÄNGEN ZWISCHEN NOMINALSKALIERTEN MERKMALEN

6.1 Die Analyse von Zusammenhängen zwischen nominalskalierten Merkmalen in einem System hierarchischer Hypothesen[1)]

Liegt bei der Untersuchung von Zusammenhängen zwischen drei nominalskalierten Merkmalen das Problem vor, daß nicht ein bestimmter Zusammenhang überprüft werden soll, sondern daß alle Möglichkeiten von Zusammenhängen aufgedeckt werden sollen, kann man einerseits mit einem EDV-Programm, zum Beispiel mit demjenigen des Verfassers, sämtliche Möglichkeiten der Zusammenhangsprüfung durchführen und die Ergebnisse entsprechend interpretieren.

Andrerseits weist VICTOR als Alternative zu diesem Vorgehen eine systematisierte Testprozedur nach, bei der man sukzessive vorgeht und gemäß den Ergebnissen der Hypothesenprüfungen auf den einzelnen Stufen der Prozedur diese abbrechen oder vereinfachen kann. Die Systematisierung der Testprozedur beruht darauf, daß, wie VICTOR nachweist , zwischen den einzelnen Unabhängigkeitsbedingungen Beziehungen bestehen, die für die Reihenfolge der verschiedenen Tests bestimmend sein können.

Dabei sind die zu prüfenden Hypothesen auf den einzelnen Stufen der Prozedur hierarchisch aufgebaut in der Weise, daß bei Ablehnung der Hypothesen auf

---

1 Vgl. zum Folgenden: VICTOR, N.: a.a.O., S. 48 ff. .

einer Stufe sodann die Hypothesen der nachfolgenden Stufe untersucht werden müssen. Kommt man hingegen auf einer Stufe der Prozedur zu dem Schluß, die entsprechende Nullhypothese anzunehmen, müssen die Hypothesen der nächsten Stufen nicht mehr untersucht werden, da deren Unabhängigkeitsbedingungen dann ebenfalls erfüllt sind.

VICTOR geht bei seiner Testprozedur in den folgenden Schritten vor[1] :

(1) Prüfung der totalen Unabhängigkeit. Liegt diese vor, erübrigen sich alle weiteren Hypothesenprüfungen, da die totale Unabhängigkeit alle anderen Formen der Unabhängigkeit mit einschließt. Liegt keine totale Unabhängigkeit vor, geht man zur zweiten Stufe der Analyse über.

(2) Prüfung der verschiedenen multiplen Unabhängigkeiten. Liegt zum Beispiel multiple Unabhängigkeit zwischen den Merkmalen (IJ) und K vor, kann die weitere Analyse auf die Bestimmung der Beziehung zwischen I und J beschränkt werden. Alle anderen bedingten und unbedingten Zusammenhänge sind dann ansonsten ausgeschlossen. Müssen alle drei multiplen Unabhängigkeitshypothesen verworfen werden, dann und nur dann geht man zur dritten Stufe der Prozedur über.

(3) Prüfung der unbedingten Zweifachunabhängigkeiten. Hier sind bei den Ergebnissen der Testverfahren folgende Möglichkeiten zu unterscheiden :

1. Alle drei Hypothesen der unbedingten Zweifachunabhängigkeit gelten. Dann besteht zwischen allen Merkmalspaaren bedingte Ab-

1 Vgl.: VICTOR, N.: a.a.O., S. 48 ff. .

hängigkeit, die aber in den Randtafeln verdeckt wird.

2. Zwei von den drei Hypothesen gelten. Dann besteht bedingte Abhängigkeit zwischen allen Paaren von Merkmalen. Diese wird in den zwei betreffenden Randtafeln verdeckt.

3. Eine der Hypothesen gilt. Es wird zur vierten Stufe der Analyse übergegangen.

4. Keine der Hypothesen gilt. Es wird zur vierten Stufe der Hypothese übergegangen.

(4) Prüfung der Unabhängigkeit zweiter Ordnung. Für den Fall, daß auf der dritten Stufe der Analyse nur eine der drei Unabhängigkeitshypothesen galt, ergibt sich bei Vorliegen der Abhängigkeit zweiter Ordnung, daß zwischen allen Paaren von Merkmalen bedingte Abhängigkeit besteht, die in einer Randtafel verdeckt wird. Ergibt sich in diesem Fall, daß Unabhängigkeit zweiter Ordnung vorliegt, dann besteht vollkommene Unabhängigkeit zwischen einem Paar von Merkmalen, zwischen den anderen Merkmalspaaren besteht dann bedingte und unbedingte Abhängigkeit. Gilt hingegen auf der dritten Stufe der Prozedur keine der überprüften Hypothesen, so ist bei Vorliegen der Unabhängigkeit zweiter Ordnung davon auszugehen, daß zwischen allen Merkmalen wechselseitige Beziehungen jedweder Art bestehen. Muß aber in diesem Fall auf Abhängigkeit zweiter Ordnung geschlossen werden, wird zur fünften Stufe der Analyse übergegangen.

(5) Prüfung der bedingten Unabhängigkeiten. Gilt bei diesen Prüfungen eine der Hypothesen, so ist ein Paar von Merkmalen von allen Ausprägun-

gen des dritten Merkmals unabhängig, in einer Randtafel wird allerdings eine Scheinassoziation vorgetäuscht. Müssen alle Hypothesen auf dieser Stufe abgelehnt werden, so besteht in der beobachteten Kontingenztafel vollkommene Abhängigkeit in jeder Richtung und Form.

Für das sukzessive Vorgehen nach der Testprozedur von VICTOR hat der Verfasser das in Abbildung 18 wiedergegebene Flußdiagramm zur Veranschaulichung entworfen.

Das VICTOR-Verfahren bietet bei Untersuchungen, in denen nur allgemein alle möglichen Wechselbeziehungen innerhalb einer dreidimensionalen Kontingenztabelle zu prüfen sind, den Vorteil, möglicherweise schneller zu endgültigen Ergebnissen und Interpretationsmöglichkeiten zu kommen, als bei der Einzelanwendung der verschiedenen Unabhängigkeitstests. Zudem lassen sich im Rahmen der VICTOR-Prozedur Scheinassoziationen aufdecken, die sich bei bestimmten Datenkonstellationen ergeben können und die mit Hilfe der Einzelprüfungen nicht als solche zu erkennen sind.

Insofern stellt die Systematisierung der Unabhängigkeits-Testprozedur von VICTOR eine beachtenswerte Ergänzung der Anwendungsmöglichkeiten der dargestellten einzelnen Unabhängigkeitstests dar.

6.2 Die Analyse von Zusammenhängen zwischen nominalskalierten Merkmalen in einem multivariaten Analysemodell

Als eine im Vergleich zur VICTOR-Prozedur anders geartete Systematisierung der Testprozedur bei Un-

---

1 Vgl. zum Folgenden : GOODMAN, L. A.: The multivariate analysis of qualitative data : interactions among multiple classifications, JASA 65 (1970), S. 232 ff. ; KU, H. H., VARNER, R. N. und KULLBACK, S.: a.a.O., S. 56 ff. .

Abb. 18 : Darstellung der Unabhängigkeitstestprozedur nach VICTOR

Erläuterungen

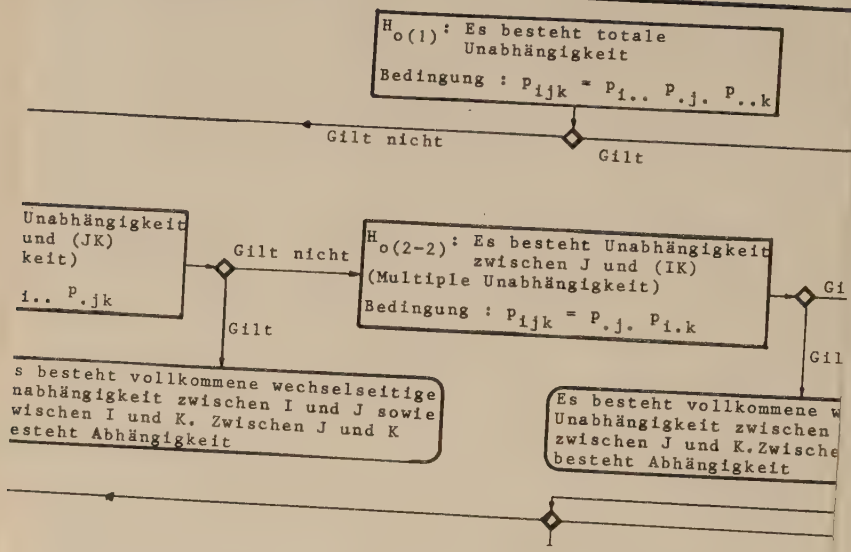
= Prüfhypothese mit Angabe der Unabhängigkeitsbedingung : Ausgangspunkt einer Stufe der Unabhängigkeitstestprozedur

= Endergebnis der Unabhängigkeitstestprozedur

= Entscheidungspunkt mit Angabe der Richtung und des Ergebnisses der Entscheidung

$H_{o(2-1)}$: Es besteht Unab
zwischen I und
(Multiple Unabhängigkeit
Bedingung : $p_{ijk} = p_{i..}$

Es be
Unabh
zwisc
beste


$H_{o(1)}$: Es besteht totale Unabhängigkeit
Bedingung : $p_{ijk} = p_{i..}\ p_{.j.}\ p_{..k}$
Gilt nicht
Gilt
Unabhängigkeit und (JK) keit)
$i..\ p_{.jk}$
Gilt nicht
$H_{o(2-2)}$: Es besteht Unabhängigkeit zwischen J und (IK)
(Multiple Unabhängigkeit)
Bedingung : $p_{ijk} = p_{.j.}\ p_{i.k}$
Gi
Gilt
Gil
s besteht vollkommene wechselseitige nabhängigkeit zwischen I und J sowie wischen I und K. Zwischen J und K esteht Abhängigkeit
Es besteht vollkommene w Unabhängigkeit zwischen zwischen J und K.Zwische besteht Abhängigkeit

abhängigkeitsanalysen von mehrdimensionalen Kontingenztabellen kann man das folgende multivariate Verfahren auffassen, das die verschiedenen Zusammenhänge und ihr Zusammenwirken in den Rahmen eines umfassenderen Analysemodells stellt.

Gegeben seien die drei Merkmale I, J und K, die gemeinsam an Untersuchungsobjekten zu beobachten sind. Die Merkmale haben die jeweiligen Ausprägungen I_i, $(i=1,2,\ldots,r)$, J_j, $(j=1,2,\ldots,c)$ und K_k, $(k=1,2,\ldots,\ell)$. Die gemeinsamen Beobachtungshäufigkeiten n_{ijk} seien in Form einer dreidimensionalen Kontingenztabelle dargestellt.

Ausgehend von dem Fall der Gleichverteilung aller Beobachtungswerte, die ja eine entsprechende Gleichverteilung der jeweiligen Randsummen und die absolute Unabhängigkeit aller Merkmale in jeder Beziehung mit einschließt, kann man die möglichen Abweichungen eines Beobachtungswertes n_{ijk} von dem Wert m aller Beobachtungswerte bei Gleichverteilung erklären aus der Beziehung[1)]

$$n_{ijk}=m+\lambda^I_i+\lambda^J_j+\lambda^K_k+\lambda^{IJ}_{ij}+\lambda^{IK}_{ik}+\lambda^{JK}_{jk}+\lambda^{IJK}_{ijk}+v_{ijk} \qquad (6.2\text{-}1).$$

In dieser Gleichung haben die einzelnen Summanden die folgende Bedeutung :

m : Größe eines Beobachtungswertes, wenn alle Beobachtungswerte gleichverteilt wären, das bedeutet :

$$m = \frac{n}{r.c.\ell} \qquad (6.2\text{-}2).$$

λ^I_i : "Zeileneffekt", das bedeutet : der Einfluß der Abweichung der Verteilung der Zeilen-

1 Vgl.: GOODMAN, L. A.: The multivariate analysis..., a.a.O., S. 232; Vgl. auch dort über die Nebenbedingungen, unter denen die Gleichung (6.2-1) nur gilt.

Randsummen von deren Gleichverteilung

λ^{J}_{j} : "Spalteneffekt", das bedeutet : der Einfluß der Abweichung der Verteilung der Spalten-Randsummen von deren Gleichverteilung

λ^{K}_{j} : "Schichteneffekt", das bedeutet : der Einfluß der Abweichung der Verteilung der Schichten-Randsummen von deren Gleichverteilung

λ^{IJ}_{ij} : Einflußkomponente der einfachen Wechselwirkung zwischen den Merkmalen I und J

λ^{IK}_{ik} : Einflußkomponente der einfachen Wechselwirkung zwischen den Merkmalen I und K

λ^{JK}_{jk} : Einflußkomponente der einfachen Wechselwirkung zwischen den Merkmalen J und K

λ^{IJK}_{ijk} :Einflußkomponente der Wechselwirkung zweiter Ordnung zwischen den Merkmalen I, J und K

v_{ijk} : Zufallsbedingter Versuchsfehler. Dieser muß unabhängig und normalverteilt sein mit einem Mittelwert $\mu = 0$ und einer Varianz σ^2 für alle i, j und k.

In diesem Modell haben die Wechselwirkungen die Funktion, die mögliche Abweichung zwischen dem Gesamteffekt $(n_{ijk} - m)$ und dem additiven Zusammenwirken von Zeileneffekt, Spalteneffekt und Schichteneffekt zu erklären. Dabei ergibt sich der Einfluß der Wechselwirkungen daraus, daß die Merkmale I, J und K nicht unabhängig voneinander sind, wobei man wiederum

die verschiedenen Arten der möglichen Abhängigkeitsbeziehungen berücksichtigen muß.

Betrachtet man nun die verschiedenen λ-Parameter nicht nur in ihrem Einfluß auf ein bestimmtes n_{ijk}, sondern die Gesamtheit aller Zeileneffekte für alle i, die Gesamtheit aller Spalteneffekte für alle j und die Gesamtheit aller Schichteneffekte für alle k, und die weiteren Aggregationen der Einzeleffekte und- wirkungen, so lassen sich über die Verteilungsform der verschiedenen λ-Parameter entsprechende Hypothesen aufstellen. Diese Hypothesen sind mit Hilfe der verschiedenen χ^2-Verfahren beziehungsweise der verschiedenen informationstheoretischen Verfahren überprüfbar[1].

Formuliert man zum Beispiel die Hypothese, daß die Zeilenrandsummen gleichverteilt seien als

$$\lambda^I = \lambda^I_1 = \lambda^I_2 = \ldots = \lambda^I_r = 0 \qquad (6.2\text{-}3),$$

und die Hypothesen über die anderen λ-Parameter analog, so ergibt sich aus der anzuwendenden Reihenfolge der verschiedenen Hypothesenprüfungen eine Hypothesen-Hierarchie in der Weise, daß das Zutreffen einer Gruppe von Hypothesen immer auch die Gültigkeit der davorliegenden Gruppen von Hypothesen einschließt. Die verschiedenen Hypothesengruppen sind in der hierarchischen Reihenfolge in Tabelle 29 angegeben.

Aus dieser Tabelle ergibt sich, daß die Systematik der hier zur Anwendung kommenden Testprozedur wegen der angestrebten Entsprechung des multivariaten Ver-

1 Dabei bedient man sich je nach Hypothesenart des Anpassungstests oder des Unabhängigkeitstests, wobei die Unabhängigkeitstests in der Form verwandt werden, wie sie in der vorliegenden Arbeit dargestellt wurde.

fahrens zur Varianzanalyse metrisch skalierter Daten eine andere ist, als die des VICTOR-Modells. Die Analogie zur Varianzanalyse ist jedoch wegen einiger notwendiger Nebenbedingungen nur rein formaler Natur[1].

Interessanterweise wurden zu der dargestellten Form einer multivariaten Analyse sowohl von GOODMAN[2] als auch im Rahmen des informationstheoretischen Modells[3] Verfahren entwickelt, die die n_{ijk} unter Berücksichtigung und gleichzeitiger Ermittlung aller Effekte und Wechselwirkungen aus den bekannten Randsummen auf iterativem Wege schätzen.

6.3 Die Möglichkeiten der Ausweitung der Zusammenhangsanalyse auf mehr als drei Merkmale

In der bisherigen Darstellung der Verfahren der Unabhängigkeitsanalyse beschränkte sich der Verfasser aus den in der Einleitung angeführten Gründen auf die Untersuchung dreier Merkmale. An dieser Stelle soll nunmehr aufgezeigt werden, welche Möglichkeiten bestehen, die angeführten Verfahren auf die Untersuchung von vier und mehr als vier Merkmalen auszuweiten.

Wie schon in der Einleitung angedeutet, lassen sich alle erörterten Verfahren auf mehr als drei Dimensionen erweitern, da diese Erweiterung von der Konzeption der Tests her keine neuen Probleme aufwirft.

---

1 Vgl.: GOODMAN, L. A.: The multivariate analysis ..., a.a.O., S. 230

2 Vgl.: GOODMAN, L. A.: The analysis of multidimensional contingency tables ..., a.a.O., S. 38 ff. .

3 Vgl.: KU, H. H., VARNER, R. N. und KULLBACK, S.: a.a.O., S. 58 ff. .

Tab. 29 : Darstellung der Hypothe
verfahren dreidimension
gungen I_i, (i=1,2,...,r

Klasse von Hypothesen-gruppen	Formale Darstellung der zu prüfenden Hypothesengruppe
1	$\lambda^{IJK} = 0$
2	$\lambda^{IJK} = 0$ $\lambda^{JK} = 0$ (Siehe Anmerkung unten)

sengruppen in hierarchischer Reihenfolge fü
aler Kontingenztabellen für die Merkmale I,
), J_j, (j=1,2,...,c) und K_k, (k=1,2,...,ℓ)

Verbale Darstellung der zu prüfenden Hypothesengruppe	Bedeutung die jeweil lungsform
Es bestehen keine zweifachen Wechselwirkungen	Es besteht
Es bestehen keine zweifachen Wechselwirkungen und keine einfachen Wechselwirkungen zwischen J und K (Siehe Anmerkung unten)	Es besteht J und K be (Siehe Anm

Bei den Verfahren zur Prüfung der einfachen Unabhängigkeit werden beobachtete Häufigkeiten mit den Häufigkeiten verglichen, die unter Gültigkeit der Unabhängigkeitshypothese zu erwarten wären. Bei Problemstellungen mit mehr als drei Dimensionen müssen nur die entsprechenden zu erwartenden Häufigkeiten unter Verwendung der dann gültigen Nullhypothese definiert werden. Beispielsweise gilt als Bedingung für die totale Unabhängigkeit zwischen den Merkmalen H, I, J und K :

$$p'_{hijk} = p_{h...}\, p_{.i..}\, p_{..j.}\, p_{...k} \qquad (6.3\text{-}1)$$

und entsprechend

$$n'_{hijk} = \frac{n_{h...}\, n_{.i..}\, n_{..j.}\, n_{...k}}{n^3} \qquad (6.3\text{-}2).$$

Analog lassen sich für die anderen Testverfahren die zu erwartenden Häufigkeiten angeben.

Mit Hilfe dieser zu erwartenden Häufigkeiten lassen sich ohne Schwierigkeiten entsprechende Prüfgrößen für Unabhängigkeitstests auf der Basis des χ^2-Verfahrens oder des informationstheoretischen Verfahrens definieren.

Auch die Tests auf Unabhängigkeit höherer Ordnung können auf mehr als drei Dimensionen ausgeweitet werden[1]. Allerdings wird hier der Rechenaufwand so hoch, daß diese Erweiterungsmöglichkeiten bisher nur in allgemeiner Form nachgewiesen wurden[2].

1 Vgl. hierzu : ROY, S. N. und KASTENBAUM, M. A.: a.a.O., S. 756; GOODMAN, L. A.: Simple methods..., a.a.O., S. 322; ADAM, J. und ENKE, H.: Analyse mehrdimensionaler Kontingenztabellen mit Hilfe des Informationsmaßes von KULLBACK, Biometrische Zeitschrift 14 (1972), S. 318 .

2 Vgl.: GOODMAN, L. A.: Interactions in multidimensional contingency tables ... , a.a.O., S. 639 ff.; GOOD, I. J.: a.a.O., S. 917 ff.; VICTOR, N.: a.a.O., S. 84 ff. .

Neben diesen rechentechnischen Problemen, die auch in abgeschwächter Form bei der Analyse von einfachen Zusammenhängen auftreten, birgt die Analyse von vier- und mehrdimensionalen Kontingenztabellen noch zwei weitere Probleme in sich.

Zum einen ist zu berücksichtigen, daß bei derartigen Kontingenztabellen die Übertragbarkeit von Unabhängigkeitsbedingungen zwischen den Randhäufigkeiten auf die entsprechenden Untertafeln im Inneren der Kontingenztabelle von der Erfüllung mehrerer Nebenbedingungen abhängt[1].

Zum anderen ergibt sich bei vier- und höherdimensionalen Kontingenztabellen eine Vielfalt von zu prüfenden Hypothesen. Als Beispiel seien die möglichen Hypothesen der Unabhängigkeit in einer vierdimensionalen Kontingenztabelle mit den Merkmalen H, I, J und K angeführt. Diese verschiedenen Hypothesen sind in Tabelle 30 wiedergegeben.

Während bei drei Untersuchungsmerkmalen insgesamt 11 verschiedene Arten von Unabhängigkeitshypothesen zu untersuchen waren, sind bei vier Merkmalen schon 67 Arten von Unabhängigkeiten zu überprüfen. Sollte dann jedes Merkmale noch mit mehr als zwei Ausprägungen vorliegen, wird die Zahl der durchzuführenden Einzeltestverfahren noch wesentlich erhöht. Damit ist offensichtlich, welche Probleme die analytische Bestimmung der verschiedenen Zusammenhänge aufwirft und welche Schwierigkeiten zudem in Bezug auf die Interpretation der Einzelergebnisse in einem Gesamtrahmen entstehen.

Vor allem hier dürfte sich der Wert von Systematisie-

---

1 Vgl.: VICTOR, N.: S. 84 .

Tab. 30 : Übersicht über die ver
Kontingenztafel mit de

Nr. der Hypothese	Nullhypothese : Es besteht Unabhängigkeit zwischen den Merkmalen
1	H,I,J,K
2	H,I,J
3	H,I,K
4	H,J,K
5	I,J,K

schiedenen möglichen Unabhängigkeitshypothe
n Merkmalen H, I, J und K und mit den Auspr

Art der Unabhängigkeit	Nr. der Hypothese	
Totale Unabhängigkeit zwischen den vier Merkmalen	35 36 37 38	
Unbedingte Unabhängigkeit zwischen jeweils drei von vier Merkmalen	39 40 41 42	

rungen der Testprozeduren, wie sie von VICTOR und im Rahmen des multivariaten Modells aufgezeigt wurden, deutlich zeigen. Denn durch diese Testprozeduren sind Möglichkeiten entstanden, komplexe Kontingenztabellen sinnvoll und mathematisch-statistisch zulässig in kleinere und geringer dimensionierte Untertabellen zu zerlegen. Allerdings weist VICTOR auf die Erweiterungsfähigkeit seines Modells nur allgemein hin, ohne ein höherdimensioniertes Modell in Einzelheiten abzuleiten[1)].

GOODMAN zeigt hingegen die zu prüfenden Hypothesenhierarchien bei vier- und fünfdimensionalen Kontingenztabellen auf[2)], und auch im Rahmen des informationstheoretischen multivariaten Modells sind Behandlungen von vier Merkmalen nachgewiesen[3)].

---

1 Vgl.: VICTOR, N.: a.a.O., S. 84 ff. .

2 Vgl.: GOODMAN, L. A.: The multivariate analysis..., a.a.O., S. 239 und S. 244 .

3 Vgl.: KU, H. H., VARNER, R. N. und KULLBACK, S.: a.a.O., S. 56 ff. .

7 SCHLUSSBEMERKUNGEN

Ziel der vorliegenden Arbeit war es, in einem Gesamtrahmen die statistischen Verfahren anschaulich darzustellen, die der Analyse multivariater Zusammenhänge zwischen nominalskalierten Merkmalen dienen. Dabei ging der Verfasser aus von den Methoden auf der Basis des PEARSON'schen χ^2-Modells, da diese jedem praktisch forschenden Statistiker in Grundzügen bekannt sein dürften, wenngleich auch nicht in der Anwendung auf die verschiedenen Arten von Zusammenhängen. Diesen Verfahren wurden informationstheoretisch begründete Ansätze gegenübergestellt und ausführlich erläutert. An dieser Stelle soll nun diskutiert werden, ob Argumente für eine Bevorzugung der einen oder der anderen Verfahrensgruppe sprechen.

Untersucht man hierbei zunächst den mathematisch-theoretischen Aspekt, so kann man an den Beginn des Vergleiches den Beweis von ANDERSON und GOODMAN stellen, daß die Prüfgrößen χ^2 und $2\hat{I}$ unter Gültigkeit der Nullhypothese der einfachen Unabhängigkeit bei genügend großem Untersuchungsumfang asymptotisch identische Prüfverteilungen aufweisen[1]. ANDERSON und GOODMAN schlagen deshalb vor, mittels eines Prüfverfahrens in jedem Einzelfall zu untersuchen, welcher der beiden Tests die größere Teststärke aufweist[2].

HOEFFDING gelang es 1965 unter Anwendung der bisher in statistischen Forschungen ungebräuchlichen "Theorie der Wahrscheinlichkeit großer Abweichungen", die

---

1 Vgl.: ANDERSON, T. W. und GOODMAN, L. A.: Statistical inference about Markov chains, AMS 28 (1957), S. 106 f. .

2 Vgl.: ANDERSON, T. W. und GOODMAN, L. A.: a.a.O., S. 108 .

auf CRAMÉR zurückgeht[1], den Nachweis zu führen, daß die Macht des $2\hat{I}$-Tests generell höher ist, als die anderer möglicher Hypothesentests[2]. Dieser Beweis wird auch mit gleichem Ergebnis für den konkreten Vergleich zwischen den Prüfgrößen $2\hat{I}$ und χ^2 erbracht[3]. Mit anderen Beweisführungen kommt später BAHADUR zum gleichen Ergebnis[4]. Entsprechende vergleichende Untersuchungen für die Prüfgrößen der Tests auf Unabhängigkeit höherer Ordnung liegen allerdings noch nicht in dieser Ausführlichkeit vor. ODOROFF untersucht für den Sonderfall kleiner Stichproben bei Kontingenztabellen vom Umfang $2 \times 2 \times 2$ und $3 \times 2 \times 2$ die Verteilungseigenschaften und die Teststärken der verschiedenen Prüfverfahren der Unabhängigkeit höherer Ordnung und kommt zu dem Ergebnis, daß hier keine gravierenden Unterschiede feststellbar sind[5].

Unter dem Aspekt der rechentechnischen Durchführung der verschiedenen Tests ergibt sich eine größere Einfachheit bei den $2\hat{I}$-Verfahren, bei denen sich die gesamte Berechnung unter Verwendung entsprechender Tabellen der $2n \cdot \ln(n)$ auf Additionen und Subtraktionen beschränkt und bei denen nicht explizit die unter Gültigkeit der Nullhypothese zu erwartenden Häufigkeiten berechnet werden müssen. Der Unterschied im arithmetischen Aufwand wird besonders augenfällig bei den Verfahren zur Prüfung der Unabhängigkeit höherer Ordnung.

---

1 Vgl.: CRAMÉR, H.: Sur un nouveau théorème-limite de la théorie des probabilités, Actualités scientifiques et industrielles No. 736, Paris 1938 .

2 Vgl.: HOEFFDING, W.: Asymptotically optimal tests for multinomial distributions, AMS 36(1965),S.383ff. .

3 Vgl.: HOEFFDING, W.: a.a.O., S. 388 ff. .

4 Vgl.: BAHADUR, R. R.: Rates of convergence of estimation and test statistics, AMS 38(1967), S.310.

5 Vgl.: ODOROFF, C. L.: A comparison of minimum logit chi-square estimation and maximum-likelihood estimation in 2×2×2 and 3×2×2 contingency tables, JASA 65 (1970), S. 1627 ff. .

Vergleicht man die beiden Gruppen von Tests unter dem Gesichtspunkt der möglichst hohen Einheitlichkeit der Verfahren bei verschiedenen Fragestellungen, so zeigt sich, daß mit dem $2\hat{I}$-Test alle denkbaren Unabhängigkeitshypothesen in größtmöglicher Einheitlichkeit der Tests geprüft werden können. Hingegen ist die Gruppe der verschiedenen auf dem χ^2-Modell basierenden Verfahren bei weitem nicht so homogen. Der Gedanke der Einheitlichkeit der Tests erscheint vor allem wesentlich bei Anwendung von Unabhängigkeitstests im Rahmen multivariater Testprozeduren, wie sie im 6. Kapitel erläutert wurden.

Überprüft man die Möglichkeiten der Ausweitung der beiden Gruppen von Tests auf andere Fragestellungen, so ergibt sich wiederum eine gewisse Überlegenheit der Tests des informationstheoretischen Modells. Infolge seiner logarithmischen Grundfunktion ist für die $2\hat{I}$-Prüfgröße uneingeschränkte Additivität gegeben[1]. Dies bedeutet aber, daß die Prüfgröße in Einzelkomponenten zerlegt werden kann[2], mit deren Hilfe die Gesamtvariabilität der Beobachtungswerte besser zu erklären ist[3], als mit den χ^2-Verfahren, denn die Prüfgröße χ^2 ist nur unter sehr einschränkenden Bedingungen additiv zerlegbar. GARNER und McGILL sprechen deshalb auch von einer Analogie zwischen der Varianzanalyse metrisch skalierter Daten und der Informationsanalyse[4].

---

1 Vgl. z.B.: GOODMAN, L. A.: The analysis of cross-classified data : independence, quasi-independence and interactions in contingency tables with or without missing entries, JASA 63 (1968), S. 1122 f. .

2 Vgl.: KULLBACK, S.: Information theory ... , a.a.O., S. 168 ff.; KULLBACK, S. und FISHER, M.: Partitioning second-order interaction in three-way contingency tables, Applied Statistics 22 (1973), S.172ff. .

3 Vgl.: LEWIS, B. N.: a.a.O., S. 115 .

4 Vgl.: GARNER, W. R. und McGILL, W. J.: The relation between information and variance analyses, Psychometrika 21 (1956), S. 220 ff. .

Diesen Vorteilen des informationstheoretischen Unabhängigkeitstests steht allerdings gegenüber, daß ihre theoretische Begründung wesentlich schwieriger ist, als die der χ^2-Tests. Für den in der Praxis tätigen Statistiker dürften aber die angeführten und für die praktische Arbeit bedeutsamen Vorteile des informationstheoretischen Modells die Anwendung der entsprechenden Verfahren empfehlenswerter erscheinen lassen, als die der χ^2-Verfahren.

Abschließend ergibt sich nun die Frage, ob und inwieweit die dargestellten statistischen Analyseverfahren im Rahmen der wirtschaftswissenschaftlichen Forschung und Praxis eingesetzt werden können. Die Wirtschaftsstatistik kann als methodische Hilfswissenschaft der allgemeinen Wirtschaftswissenschaften keinen Einfluß auf deren Problemstellungen nehmen. Sie kann aber für spezielle, vorgegebene Fragen analytische Lösungsmöglichkeiten anbieten.

Immer wenn es in den Wirtschaftswissenschaften darum geht, nominalskalierte Merkmale als Aktionsgrößen ökonomischer Modelle oder Vorgänge zu erklären, können die angeführten Verfahren zur Anwendung gelangen. Dabei gibt es eine Vielzahl von nominalskalierten Merkmalen in der allgemeinen Ökonomie, man denke nur an Produktionsfaktoren, Zielvorstellungen, Marktformen, ökonomische Gruppen, Standorte und Rechtsformen von Unternehmen, Wirtschaftssektoren, Organisationsformen und viele andere mehr. Spezielle Teilbereiche der Wirtschaftswissenschaften, wie beispielsweise der Bereich der Marktforschung und des Marketing, der Bereich der Regionalforschung oder der Verkehrswissenschaften[1)] weisen eine große Fülle

1 Vgl. hier speziell : SCHULTE , P.: Möglichkeiten und Grenzen einer entscheidungsorientierten Auswertung der amtlichen Straßenverkehrs-Unfallstatistik für die Zwecke der Unfallbekämpfung - dargestellt anhand ausgewählter Unfalldaten des Landes Nordrhein-Westfalen, Münster 1972, S. 35 ff. .

von nur nominal skalierbaren Merkmalen auf, denen eine wesentliche Bedeutung in Theorie und Praxis zukommt.

In allen diesen Fällen sind Aufschlüsse über die betreffenden Merkmale zumeist nur aus der Erkenntnis des Zusammenwirkens mit anderen Merkmalen möglich. Dabei sind die angeführten statistischen Verfahren die einzige Analysemöglichkeit, wenn untersucht werden soll, ob Zusammenhänge bestehen, welcher Art diese sind und wie groß ihre Stärke ist. Darüberhinaus können sich aus dem Vergleich mehrerer Kontingenztabellen[1)] und mit weitergehenden statistischen Verfahren noch tiefere Aufschlüsse über die Art der nachgewiesenen Zusammenhänge und damit über deren Interpretation ergeben[2)].

Trotz dieser unbestreitbaren Vorteile der Verfahren zur Bestimmung und Beurteilung multivariater Zusammenhänge zwischen nominalskalierten Merkmalen findet sich deren Anwendung in der Praxis noch zu selten. Der Hauptgrund hierfür dürfte in der bislang unzureichenden Kenntnis der entsprechenden Verfahren mit ihren Varianten liegen. Der Verfasser hofft, mit der vorliegenden Schrift Anregungen zur Bewältigung dieses Problemkreises gegeben zu haben.

---

1 Vgl. z.B.: GOODMAN, L. A.: On methods for comparing contingency tables, a.a.O., S. 94 ff. .

2 Vgl. hier z. B. die Ausführungen zum multiplen Anteilswertvergleich bei : GOODMAN, L. A.: How to ransack social mobility tables and other kinds of cross-classification tables, American Journal of Sociology 1969/70, S. 20 ff. .

Literaturverzeichnis

ADAM, Johannes und ENKE, Helmut — Analyse mehrdimensionaler Kontingenztafeln mit Hilfe des Informationsmaßes von KULLBACK, Biometrische Zeitschrift 14 (1972), S. 305 - 323 .

ADAMS, Ernest W., FAGOT, Robert F. und ROBINSON, Richard E. — A Theory of appropriate statistics, Psychometrika 30 (1965), S. 99-127 .

ANDERSON, T. W. und GOODMAN, Leo A. — Statistical inference about Markov chains, AMS 28 (1957), S. 89-110 .

BARTLETT, Maurice Stevenson — Contingency table interactions, JRSS Supplement 2 (1935), S. 248-252 .

BAHADUR, R. R. — Rates of convergence of estimation and test statistics, AMS 38 (1967), S. 303-324 .

BECKMANN, Jochen — Gravitationstheoretischer Ansatz zur Ermittlung des regionalen Studentenaufkommens in Nordrhein-Westfalen, Hannover - München 1973 .

BIHN, Willi R. — Die informationstheoretische Messung von Struktursystemen des internationalen Handels, Freiburg(Breisg.), 1967 .

BOLTZMANN, Ludwig — Vorlesungen über Gastheorie, I.Theil, Leipzig 1895 .

BREDENKAMP, Jürgen — Der Signifikanztest in der psychologischen Forschung, Frankfurt/Main, 1972 .

CAMPBELL, N. R. — Symposium : Measurement and its importance for philosophy, Aristotelian Society Supplement 17 (1938).

COOMBS, Clyde H. — Theory and methods of social measurement, in : FESTINGER, Leon und KATZ, Daniel (Eds.): Research methods in the behavioral sciences, London, 1953, S. 471-535.

COOMBS, Clyde H., DAWES, Robin M. und TVERSKY, Amos — Mathematical psychology, an elementary introduction, Englewood Cliffs (New Jersey), 1970 .

COOMBS, Clyde H., RAIFFA, Howard und THRALL, R. M. — Some views on mathematical models and measurement theory, Psychological Review 61 (1954), S. 132-144.

CRAMÉR, Harald — Sur un nouveau théorème-limite de la théorie des probabilités, Actualités scientifiques et industrielles, No. 736, Paris 1938 .

DARROCH, J. N. — Interactions in multi-factor contingency tables, JRSS(B) 24 (1962), S. 251-263 .

FIENBERG, Stephen E. — The analysis of multidimensional contingency tables, Ecology 51 (1970), S. 419-433 .

FISHER, Ronald A. — On the interpretation of chi-square from contingency tables and the calculation of P, JRSS(A) 85 (1922), S. 87-94.

Derselbe — Theory of statistical estimation, Proceedings of the Cambridge philosophical Society 22 (1925), S. 700-725.

Derselbe — The logic of inductive inference, JRSS(A) 98 (1935), S. 39-54 .

FISZ, Marek — Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, 4. durchgesehene Aufl., Berlin 1966 .

FÖRSTER, Erhard und EGERMAYER, Frantisek — Korrelations- und Regressionsanalyse, ein Leitfaden für Ökonomen, Berlin, 1966 .

GARNER, W. R. und McGILL, William J. — The relation between information and variance analyses, Psychometrika 21 (1956), S. 219-228 .

GOOD, Irving John — Maximum entropy for hypothesis formulation, especially for multidimensional contingency tables, AMS 34 (1963), S. 911-934.

GOODMAN, Leo A. — On PLACKETT's test for contingency table interactions, JRSS(B) 25 (1963), S. 179-188.

Derselbe — On methods for comparing contingency tables, JRSS(A) 126 (1963), S. 94-108 .

GOODMAN, Leo A.	Simple methods for analyzing three-factor interactions in contingency tables, JASA 59 (1964), S. 319-352.
Derselbe	Interactions in multidimensional contingency tables, AMS 35 (1964), S. 632-646.
Derselbe	The analysis of cross-classified data: independence, quasi independence and interactions in contingency tables with or without missing entries, JASA 63 (1968), S. 1091-1131.
Derselbe	How to ransack social mobility tables and other kinds of cross classification tables, American Journal of Sociology 1969/70, S. 1-40 .
Derselbe	The multivariate analysis of qualitative data: interactions among multiple classifications, JASA 65 (1970), S. 226-256 .
Derselbe	The analysis of multidimensional contingency tables: stepwise procedures and direct estimation methods for building models for multiple classifications, Technometrics 13 (1971), S. 33-61.
GOODMAN, Leo A. und KRUSKAL, Wallis H.	Measures of association for cross-classifications, JASA 49 (1954), S. 732-764 .
Dieselben	Measures of association for cross-classifications. II: Further discussion and references, JASA 54 (1959), S. 123-163 .
Dieselben	Measures of association for cross-classifications. III: Approximate sampling theory, JASA 58 (1963), S. 310-364 .
GUILFORD, J. P.	Psychometric methods, 2nd Edition, New York-Toronto-London 1954 .
HARTLEY, R. V.	Transmission of information, The BELL Systems technical Journal 7 (1928), S. 535-563 .
HOEFFDING, Wassily	Asymptotically optimal tests for multinomial distributions, AMS 36 (1965), S. 369-401 .

JAGLOM, A. M. und JAGLOM, I. M. — Wahrscheinlichkeit und Information, 3. Aufl., Berlin, 1967 .

JESDINSKI, H. J. — Mehrdimensionale Kontingenztafeln, in : WALTER, E. (Hrsg.): Statistische Methoden II, Mehrvariable Metoden und Datenverarbeitung, Berlin-Heidelberg-New York 1970, S. 9-13 .

JOHNSON, Norman L. und KOTZ, Samuel — Distributions in statistics - Continous univariate dsitributions - 1, Boston,1970 .

KASTENBAUM, Marvin A. und LAMPHIEAR, D. E. — Calculation of chi-square to test the no three-factor interaction hypothesis, Biometrics 15 (1959), S. 107-115 .

KENDALL, Maurice G. — On the future of statistics - a second look, JRSS(A) 131 (1968), S. 182-192 .

Derselbe — Entropy, probability and information, International statistical Review 41 (1973), S. 59-68 .

KENDALL, Maurice G. und BUCKLAND, William R. — A dictionary of statistical terms, 3rd Edition, Edinburgh 1971 .

KENDALL, Maurice G. und STUART, Alan — The advanced theory of statistics, Vol.1 Distribution theory, 2nd Edition, London 1963 .

Dieselben — The advanced theory of statistics, Vol. 2 Inference and relationship, London 1961 .

KREYSZIG, Erwin — Statistische Methoden und ihre Anwendung, 4. durchgesehene Aufl., Göttingen,1973 .

KU, Harry H. — A note on contingency tables involving zero-frequencies and the 2I-test, Technometrics 5 (1963), S. 398-400.

KU, Harry H. und KULLBACK, Solomon — Interactions in multidimensional contingency tables: an information theoretic approach, Journal of Research of the national Bureau of Standards 72B (1968), S.159-199 .

KU, Harry H., VARNER, Ruth N. und KULLBACK, Solomon — On the analysis of multidimensional contingency tables, JASA 66 (1971), S. 55-64 .

KULLBACK, Solomon — Information theory and statistics, New York-London,1959 .

KULLBACK, Solomon und FISHER, Marian — Partitioning second order interaction in three-way contingency tables, Applied Statistics 22 (1973), S. 172-184 .

KULLBACK, Solomon, KUPPERMAN, M. und KU, Harry H. — An application of information theory to the analysis of contingency tables with a table of $2n \cdot \ln(n)$, n=1(1)10000, Journal of Research of the national Bureau of Standards 66 (1962), S. 217-243 .

KULLBACK, Solomon und LEIBLER, R. A. — On information and sufficiency AMS 22 (1951), S. 79-86 .

LANCASTER, H. O. — The combination of probabilities arising from data in discrete distributions, Biometrika 36 (1949), S. 310 ff. .

Derselbe — Complex contingency tables treated by the partitioning of χ^2, JRSS(B) 13 (1951), S. 242-249 .

LEWIS, B. N. — On the analysis of interaction in multidimensional contingency tables, JRSS(A) 125 (1962), S.88-117.

McGILL, William J. — Multivariate information transmission, Psychometrika 19 (1954), S. 97-116 .

NORTON, H. W. — Calculation of chi-square for complex contingency tables, JASA 40 (1945), S.251-258 .

ODOROFF, Charles L. — A comparison of minimum logit chi-square estimation and maximum likelihood estimation in 2×2×2 and 3×2×2 contingency tables: tests for interaction, JASA 65 (1970), S.1617-1631.

PAWLIK, Kurt — Der maximale Kontingenzkoeffizient im Falle nichtquadratischer Kontingenztafeln,Metrika 2(1959), S.150-166 .

PEARSON, Karl — On a criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen in random sampling, The London, Edinburgh and Dublin philosophical magazin, Series 5, Vol. 50 (1900), S. 157 ff. .

Derselbe — On the theory of contingency and its relation to association and to normal correlation, Draper's Memoirs, Biometric Series, No.1, London 1904 .

PLACKETT, R. L. — A note on interactions in contingency tables, JRSS(B) 24 (1962), S. 162-166 .

RÉNYI, A. — Wahrscheinlichkeitsrechnung, mit einem Anhang über Informationstheorie, 3. Aufl., Berlin 1971 .

ROY, S. N. und KASTENBAUM, Marvin A. — On the hypothesis of no "interaction" in a multi-way contingency table, AMS 27 (1956), S.749-757

SACHS, Lothar — Statistische Auswertungsmethoden, dritte neubearbeitete und erweiterte Aufl. mit neuer Bibliographie, Berlin-Heidelberg-New York 1972 .

SCHULTE, Peter — Möglichkeiten und Grenzen einer entscheidungsorientierten Auswertung der amtlichen Straßenverkehrs-Unfallstatistik für Zwecke der Unfallbekämpfung - dargestellt anhand ausgewählter Unfalldaten des Landes Nordrhein-Westfalen, Münster 1972.

SENDERS, Virginia L. — Measurement and statistics, New York 1958 .

SHANNON, Claude E. — A mathematical theory of communication, The BELL Systems technical Journal 27 (1948), S. 379-423 und S. 623-656, wiedergegeben in : SHANNON, C. E. und WEAVER, W.: The mathematical theory of communication, 3rd Edition, Urbana 1963.

SIEGEL, Sidney — Nonparametric statistics for the behavioral sciences, New York-Toronto-London 1956 .

SIMPSON, E. H. — The interpretation of interaction in contingency tables, JRSS(B) 13 (1951), S. 238-241 .

SIXTL, Friedrich — Meßmethoden der Psychologie - Theoretische Grundlagen und Probleme-, Weinheim, 1967 .

STATISTISCHES LANDESAMT NORDRHEIN-WESTFALEN — Statistische Angaben für kreisfreie Städte und Kreise des Landes Nordrhein-Westfalen, Kreisstandardzahlen 1971, Düsseldorf 1971 .

Dasselbe — Statistische Angaben für kreisfreie Städte und Kreise des Landes Nordrhein-Westfalen, Kreisstandardzahlen 1972, Düsseldorf 1972 .

STEVENS, S. S. — Mathematics, measurement and psychophysics, in : STEVENS, S. S. (Ed.): Handbook of experimental psychology, New York-London 1951, S. 1-49 .

TORGERSON, Warren S. — Theory and methods of scaling, New York-London-Sidney 1958, 5th Printing 1965 .

VAN DER WAERDEN, B.L. — Mathematische Statistik, 2. Aufl., Berlin-Heidelberg-New York 1965 .

VICTOR, Norbert — Analyse mehrdimensionaler Kontingenztafeln, Mainz 1970 .

WILKS, Samuel S. — The likelihood test of independence in contingency tables, AMS 6 (1935), S. 190-196 .

WILSON, E. B. und HILFERTY, M. M. — The distribution of chi-square, Proceedings of the national Academy of science 17 (1931), S. 694 ff. .

WOOLF, B. — The log-likelihood ratio test (the G-test), methods and tables for tests of heterogeneity in contingency tables, Annals of human Genetics 21 (1957), S. 397-409 .

YATES, F. — Contingency tables involving small numbers and the χ^2-test, JRSS Supplement 1 (1934), S. 217-235 .

YULE, G. Udny und KENDALL, Maurice G. — An introduction to the theory of statistics, 14 th Edition, 3rd Impression, 4th Printing, London, 1965 .

Anhang

1. EDV-Programme

Aus drucktechnischen Gründen können nachfolgend nur allgemeine Benutzungshinweise zu den jeweiligen Programmen zur Zusammenhangsanalyse nominalskalierter Daten gegeben werden.

Interessenten für die vollständigen Programme wenden sich bitte an den Verfasser.

Programm zur Unabhängigkeitsanalyse dreidimensionaler Kontingenztabellen auf der Basis des χ^2-Verfahrens

```
C     PROGRAMM ZUR UNABHAENGIGKEITSANALYSE DREIDIMENSIONALER
C     KONTINGENZTABELLEN AUF DER BASIS DES CHI-QUADRAT-VERFAHRENS
C
C
C     SCHEMA DER EINGABEMATRIX FUER DIE MERKMALE I,J UND K :
C
C          |      |    K-1    |    K-2    |.....|   K-16    |
C     =====|======|===========|===========|     |===========|
C          |      |           |           |     |           |
C          | J-1  |N  1- 1- 1|N  1- 1- 2|     |N  1- 1-16|
C          |      |           |           |     |           |
C          | J-2  |N  1- 2- 1|N  1- 2- 2|     |N  1- 2-16|
C          |      |           |           |     |           |
C     I-1  |  .   |           |           |     |           |
C          |  .   |           |           |     |           |
C          |  .   |           |           |     |           |
C          |      |           |           |     |           |
C          | J-10 |N  1-10- 1|N  1-10- 2|     |N  1-10-16|
C          |      |           |           |     |           |
C     -----|------|-----------|-----------|     |-----------|
C          |      |           |           |     |           |
C          | J-1  |N  2- 1- 1|N  2- 1- 2|     |N  2- 1-16|
C          |      |           |           |     |           |
C          | J-2  |           |           |     |           |
C          |      |           |           |     |           |
C     I-2  |  .   |           |           |     |           |
C          |  .   |           |           |     |           |
C          |  .   |           |           |     |           |
C          |      |           |           |     |           |
C          | J-10 |           |           |     |           |
C          |      |           |           |     |           |
C     -----|------|-----------|-----------|     |-----------|
C          |      |           |           |     |           |
C       .
C       .
C       .
C       .
C       .
C          |      |           |           |     |           |
C     -----|------|-----------|-----------|     |-----------|
C          |      |           |           |     |           |
C          | J-1  |N 10- 1- 1|N 10- 1- 2|     |N 10- 1-16|
C          |      |           |           |     |           |
C          | J-2  |N 10- 2- 1|N 10- 2- 2|     |N 10- 2-16|
C          |      |           |           |     |           |
C     I=10 |  .   |           |           |     |           |
C          |  .   |           |           |     |           |
C          |  .   |           |           |     |           |
C          |      |           |           |     |           |
C          | J-10 |N 10-10- 1|N 10-10- 2|     |N 10-10-16|
C          |      |           |           |     |           |
C     ==========================================
C
C     DER ERSTE LAUFINDEX DER HAEUFIGKEITEN "N" BEZIEHT SICH AUF
C     DAS MERKMAL "I", DER ZWEITE LAUFINDEX AUF DAS MERKMAL "J"  UND
```

DER DRITTE LAUFINDEX AUF DAS MERKMAL "K" .

DIE DATEN WERDEN ZEILENWEISE IM FORMAT I5 EINGELESEN.
BEI DER EINGABE EINER DREIDIMENSIONALEN KONTINGENZTABELLE SIND BEI DIESEM PROGRAMM DIE FOLGENDEN NEBENBEDINGUNGEN ZU BEACHTEN :

1. DAS MERKMAL "K" DARF BIS ZU 16 AUSPRAEGUNGEN HABEN .

2. DAS PRODUKT AUS DER ANZAHL DER AUSPRAEGUNGEN VON MERKMAL "I" UND DER ANZAHL DER AUSPRAEGUNGEN VON "J" DARF NICHT GROESSER SEIN ALS 100 (Z.B.: I=20 UND J=5 ODER I=10 UND J=10)

3. DAS MERKMAL "J" DARF BIS ZU 16 AUSPRAEGUNGEN HABEN. (BEI GROESSEREM BEDARF KANN MERKMAL "J" MIT MERKMAL "I" VERTAUSCHT WERDEN .)

4. DIE PRODUKTE AUS DEN ANZAHLEN DER AUSPRAEGUNGEN (I*K) UND (J*K) DUERFEN NICHT GROESSER ALS 100 WERDEN .

MIT DIESEM PROGRAMM WERDEN DIE PRUEFGROESSEN DER TESTS AUF TOTALE, MULTIPLE, UNBEDINGT-ZWEIFACHE UND PARTIELLE UNABHAENGIGKEIT BERECHNET UND AUSGEDRUCKT. NEBEN DEN PRUEFGROESSEN WIRD DIE ZAHL DER FREIHEITSGRADE UND BEI MEHR ALS 30 FREIHEITSGRADEN DER STANDARDNORMALVERTEILT Z-WERT ZUR SIGNIFIKANZPRUEFUNG ANGEGEBEN, EBENSO WIE DER KONTINGENZKOEFFIZIENT UND DER KORRIGIERTE KONTINGENZKOEFFIZIENT.

Programm zur Unabhängigkeitsanalyse dreidimensionaler Kontingenztabellen auf der Basis des informationstheoretischen Modells

```
C
C    PROGRAMM ZUR UNABHAENGIGKEITSANALYSE DREIDIMENSIONALER KONTINGENZ-
C    TAFELN AUF DER BASIS DES INFORMATIONSTHEORETISCHEN VERFAHRENS.
C    DAS PROGRAMM SCHLIESST DIE ANALYSE DER SECOND-ORDER-INTERACTION
C  EIN.(VGL. KULLBACK,S.: INFORMATIONN THEORY AND STATISTICS, 1959)
C
C
C
C    SCHEMA DER EINGABEMATRIX FUER DIE MERKMALE I,J UND K :
```

		K-1	K-2	.....	K-16
	J-1	N 1- 1- 1	N 1- 1- 2		N 1- 1-16
	J-2	N 1- 2- 1	N 1- 2- 2		N 1- 2-16
I-1	.				
	.				
	.				
	J-10	N 1-10- 1	N 1-10- 2		N 1-10-16
	J-1	N 2- 1- 1	N 2- 1- 2		N 2- 1-16
	J-2				
I-2	.				
	.				
	.				
	J-10				
	.				
	.				
	.				
	.				
	J-1	N 10- 1- 1	N 10- 1- 2		N 10- 1-16
	J-2	N 10- 2- 1	N 10- 2- 2		N 10- 2-16
I=10	.				
	.				
	.				
	J-10	N 10-10- 1	N 10-10- 2		N 10-10-16

DER ERSTE LAUFINDEX DER HAEUFIGKEITEN "N" BEZIEHT SICH AUF DAS MERKMAL "I", DER ZWEITE LAUFINDEX AUF DAS MERKMAL "J" UND DER DRITTE LAUFINDEX AUF DAS MERKMAL "K" .

DIE DATEN WERDEN ZEILENWEISE IM FORMAT I5 EINGELESEN.
BEI DER EINGABE EINER DREIDIMENSIONALEN KONTINGENZTABELLE SIND BEI DIESEM PROGRAMM DIE FOLGENDEN NEBENBEDINGUNGEN ZU BEACHTEN :

1. DAS MERKMAL "K" DARF BIS ZU 16 AUSPRAEGUNGEN HABEN .

2. DAS PRODUKT AUS DER ANZAHL DER AUSPRAEGUNGEN VON MERKMAL "I" UND DER ANZAHL DER AUSPRAEGUNGEN VON "J" DARF NICHT GROESSER SEIN ALS 100 (Z.B.: I=20 UND J=5 ODER I=10 UND J=10)

3. DAS MERKMAL "J" DARF BIS ZU 16 AUSPRAEGUNGEN HABEN. (BEI GROESSEREM BEDARF KANN MERKMAL "J" MIT MERKMAL "I" VERTAUSCHT WERDEN .)

4. DIE PRODUKTE AUS DEN ANZAHLEN DER AUSPRAEGUNGEN (I*K) UND (J*K) DUERFEN NICHT GROESSER ALS 100 WERDEN .

MIT DIESEM PROGRAMM WERDEN DIE PRUEFGROESSEN DER TESTS AUF TOTALE, MULTIPLE, UNBEDINGT-ZWEIFACHE, PARTIELLE UNABHAENGIGKEIT UND AUF UNABHAENGIGKEIT ZWEITER ORDNUNG BERECHNET. NEBEN DEN PRUEFGROESSEN WIRD DIE ZAHL DER FREIHEITSGRADE UND BEI MEHR ALS 30 FREIHEITSGRADEN DER STANDARDNORMALVERTEILTE Z-WERT ZUR SIGNIFIKANZPRUEFUNG ANGEGEBEN, EBENSO WIE DER KONTINGENZKOEFFIZIENT UND DER KORRIGIERTEN KONTINGENZKOEFFIZIENT . BEI ZU KLEINEM UNTERSUCHUNGSUMFANG, RANDSUMMEN = 0 ODER ZU VIELEN NULLFELDERN WIRD AN DEN ENTSPRECHENDEN STELLEN VOR DER UNEINGESCHRAENKTEN VERWENDUNG DER ERGEBNISSE GEWARNT.

Programm zur Analyse der Unabhängigkeit zweiter Ordnung (nach GOODMAN) in dreidimensionalen Kontingenztabellen

```
C      DIESES PROGRAMM DIENT DER ANALYSE DER UNABHAENGIGKEIT
C      HOEHERER ORDNUNG IM ALLGEMEINEN FALL EINER KONTINGENZTABELLE
C      VOM UMFANG I X J X K .
C
C      MAXIMALE DIMENSIONIERUNG DER KONTINGENZTABELLE IST DABEI DER
C      UMFANG 10 X 10 X 10 .
C     DABEI DARF KEINES DER UNTERSUCHTEN MERKMALE MEHR ALS 10 AUSPRAE-
C     GUNGEN HABEN
C
C     DIE DATEN WERDEN WIE FOLGT EINGELESEN :
C     ========================================
C     ZUERST MUSS DER UMFANG DER BEOBACHTETEN MATRIX IM FORMAT 3I2
C     ANGEGEBEN WERDEN.
C
C     FUER DIE BEOBACHTETEN DATEN GILT DIE FOLGENDE EINGABEMATRIX :
C
C
C                |         |           |     |           |
C                |         |           |     |           |
C                |  J-01   |    J-02   | ... |   J-L2    |
C                |         |           |     |           |
C     ====+======+=========+===========+=====+===========+
C         |      |         |           |     |           |
C         |I-01  |N  1 1 1 |N  1 2 1   |     |N  1 L2 1  |
C         |I-02  |N  2 1 1 |N  2 2 1   |     |N  2 L2 1  |
C     K-01|  .   |         |           |     |           |
C         |  .   |         |           |     |           |
C         |I-L1  |N L1 1 1 |N L1 2 1   |     |N L1 L2 1  |
C     ----+------+---------+-----------+     +-----------|
C         |I-01  |         |           |     |           |
C         |I-02  |         |           |     |           |
C     K-02|  .   |         |           |     |           |
C         |  .   |         |           |     |           |
C         |I-L1  |         |           |     |           |
C     ----+------+---------+-----------+     +-----------|
C       .  |      |                             |
C       .  |      |                             |
C       .  |      |                             |
C       .  |      |                             |
C       .  |      |                             |
C     ----+------+---------+-----------+     +-----------|
C         |I-01  |N  1 1L3 |           |     |           |
C         |I-02  |N  2 1L3 |           |     |           |
C     K-L3|  .   |         |           |     |           |
C         |  .   |         |           |     |           |
C         |I-L1  |N L1 1L3 |           |     |N L1 L2 L3 |
C     ====+======+=========+===========+=====+===========+
C
C
C     DER ERSTE LAUFINDEX DER BEOBACHTETEN HAEUFIGKEITEN "N" BEZIEHT
C     SICH AUF DAS MERKMAL "I", DER ZWEITE LAUFINDEX AUF DAS MERKMAL "J"
C     UND DER DRITTE LAUFINDEX AUF DAS MERKMAL "K".
C
C     DIE DATEN DIESER MATRIX WERDEN ZEILENWEISE IM FORMAT 10I4 EIN-
C     GEGEBEN.
C     MIT DIESEM PROGRAMM WERDEN DIE PRUEFGROESSEN Y-QUADRAT UND DIE
C     ZAHL DER FREIHEITSGRADE DES TESTS AUF UNABHAENGIGKEIT ZWEITER
C     ORDNUNG BERECHNET UND ANGEGEBEN.
```

2. Tabellen

Tabelle 1

Tabelle der $2n \cdot \ln(n)$ für
$n = 1$ bis $n = 9.999$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0 0	0 0	2.7726	6.5917	11 0904	16 0944	21.5011	27 2427	33 2711	39 5500
1	46 0517	52 7537	59 6378	66 6887	73.8936	81 2415	88 7228	96 3293	104 0534	111.8887
2	119 8293	127 8699	136 0059	144.2327	152.5466	160.9438	169.4210	177.9752	186.6035	195.3032
3	204 0718	212 9072	221 8071	230 7695	239.7925	248 8744	258.0134	267.2079	276.4565	285.7578
4	295 1104	304 5129	313 9642	323 4632	333.0087	342 5996	352 2350	361.9139	371.6353	381.3984
5	391 2023	401 0462	410 9293	420 8509	430.8103	440 8067	450.8394	460.9078	471.0114	481.1494
6	491 3213	501 5266	511.7647	522 0350	532.3370	542.6703	553 0344	563 4288	573 8530	584.3067
7	594 7893	605 3005	615.8399	626 4071	637.0016	647 6232	658.2715	668.9460	679.6466	690.3728
8	701 1243	711 9008	722 7020	733 5275	744.3772	755 2507	766.1477	777.0680	788.0113	798 9773
9	809 9657	820 9764	832 0091	843 0635	854.1394	865 2366	876 3549	887 4939	898.6536	909.8337
10	921 0340	932 2543	943 4945	954.7542	966.0333	977 3317	988.6491	999.9854	1011.3403	1022.7138
11	1034 1057	1045 5157	1056 9437	1068.3896	1079.8532	1091 3344	1102.8329	1114 3487	1125.8816	1137.4314
12	1148 9980	1160 5813	1172.1811	1183.7974	1195.4298	1207 0784	1218.7430	1230 4235	1242.1197	1253 8316
13	1265 5590	1277 3017	1289 0597	1300.8329	1312.6211	1324 4242	1336.2421	1348 0748	1359.9220	1371 7838
14	1383 6599	1395 5503	1407 4549	1419 3736	1431.3062	1443 2528	1455.2131	1467.1872	1479.1748	1491.1760
15	1503 1906	1515 2185	1527 2597	1539.3140	1551.3814	1563 4618	1575.5551	1587 6612	1599.7800	1611.9115
16	1624 0556	1636 2122	1648 3812	1660 5626	1672 7562	1684 9620	1697.1799	1709.4099	1721.6519	1733.9058
17	1746 1715	1758.4489	1770.7381	1783.0389	1795.3512	1807.6751	1820.0104	1832 3570	1844.7149	1857.0841
18	1869 4645	1881 8559	1894 2584	1906.6719	1919.0964	1931 5317	1943.9778	1956.4346	1968.9022	1981.3804
19	1993 8691	2006 3684	2018 8782	2031.3984	2043.9290	2056.4698	2069.0209	2081.5823	2094.1537	2106.7353
20	2119 3269	2131.9286	2144.5401	2157 1616	2169.7930	2182 4341	2195.0850	2207 7456	2220 4158	2233 0957
21	2245 7852	2258 4841	2271 1926	2283.9105	2296.6377	2309 3744	2322.1203	2334.8755	2347.6398	2360.4134
22	2373 1961	2385 9879	2398.7888	2411 5986	2424.4174	2437.2452	2450.0818	2462 9273	2475.7816	2488.6447
23	2501 5165	2514.3970	2527.2861	2540 1839	2553.0903	2566.0052	2578.9286	2591.8605	2604 8008	2617.7496
24	2630 7067	2643.6721	2656.6459	2669.6279	2682.6181	2695.6165	2708.6231	2721.6378	2734.6607	2747.6915
25	2760 7305	2773 7774	2786.8323	2799.8951	2812.9658	2826 0444	2839.1309	2852 2251	2865 3271	2878 4369
26	2891 5544	2904 6797	2917.8125	2930.9530	2944.1011	2957.2568	2970.4200	2983.5908	2996.7690	3009.9547
27	3023 1479	3036 3484	3049 5563	3062.7716	3075 9942	3089.2241	3102.4613	3115.7057	3128.9573	3142.2162
28	3155 4822	3168 7553	3182.0356	3195 3229	3208.6174	3221 9188	3235.2273	3248 5428	3261.8652	3275.1946
29	3288.5309	3301.8741	3315.2242	3328.5811	3341.9449	3355.3155	3368.6928	3382 0769	3395.4677	3408.8653
30	3422.2695	3435 6804	3449 0979	3462 5221	3475. 9528	3489 3902	3502. 8341	3516. 2845	3529 7415	3543. 2049
31	3556 6748	3570 1512	3583 6340	3597.1232	3610.6188	3624.1208	3637.6291	3651 1437	3664 6647	3678.1919
32	3691 7254	3705 2652	3718.8112	3732.3634	3745. 9218	3759.4864	3773.0571	3786.6340	3800.2169	3813.8060
33	3827. 4012	3841 0024	3854. 6096	3868 2229	3881.8422	3895.4675	3909.0987	3922.7359	3936.3790	3950.0281
34	3963 6830	3977.3438	3991.0105	4004.6831	4018.3615	4032.0456	4045.7356	4059 4314	4073.1329	4086.8402
35	4100 5532	4114 2719	4127.9963	4141.7264	4155.4622	4169 2036	4182.9507	4196.7033	4210.4616	4224.2255
36	4237 9949	4251.7699	4265.5504	4279.3365	4293.1280	4306.9251	4320.7276	4334.5356	4348.3490	4362.1679
37	4375 9922	4389.8219	4403.6570	4417.4975	4431.3433	4445.1945	4459.0510	4472.9129	4486.7800	4500.6524
38	4514 5302	4528 4131	4542 3013	4556.1948	4570.0935	4583.9974	4597.9064	4611.8207	4625.7401	4639.6647
39	4653 5945	4667 5293	4681.4693	4695 4144	4709.3645	4723 3198	4737.2801	4751.2454	4765.2158	4779.1912
40	4793 1716	4807 1571	4821 1475	4835.1429	4849.1432	4863.1485	4877.1588	4891.1739	4905.1940	4919.2190
41	4933 2489	4947 2836	4961.3232	4975.3677	4989.4170	5003 4712	5017.5301	5031.5939	5045.6625	5059.7358
42	5073 8140	5087 8968	5101.9845	5116.0769	5130.1740	5144.2758	5158.3823	5172 4935	5186 6095	5200.7300
43	5214 8553	5228.9852	5243.1197	5257.2589	5271.4027	5285.5510	5299.7040	5313.8616	5328.0238	5342.1905
44	5356 3618	5370 5376	5384 7179	5398 9028	5413.0922	5427.2861	5441.4845	5455.6874	5469.8947	5484.1066
45	5498 3228	5512.5435	5526.7687	5540.9983	5555.2323	5569.4707	5583.7134	5597.9606	5612.2122	5626.4681
46	5640 7286	5654 9930	5669.2620	5683 5353	5697. 8129	5712.0948	5726.3810	5740.6715	5754.9663	5769.2654
47	5783 5687	5797 8763	5812.1882	5826.5042	5840.8245	5855.1491	5869.4778	5883 8107	5898.1479	5912.4892
48	5926 8347	5941 1843	5955 5381	5969 8961	5984.2582	5998.6244	6012.9948	6027.3693	6041.7478	6056.1305
49	6070 5173	6084.9081	6099 3031	6113 7020	6128.1051	6142 5122	6156.9233	6171 3385	6185.7577	6200.1809

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6214.6081	6229.0393	6243.4745	6257.9137	6272.3569	6286.8040	6301.2551	6315.7102	6330.1692	6344.6321
51	6359.0989	6373.5697	6388.0444	6402.5230	6417.0055	6431.4919	6445.9822	6460.4763	6474.9744	6489.4762
52	6503.9820	6518.4915	6533.0050	6547.5222	6562.0433	6576.5682	6591.0969	6605.6294	6620.1657	6634.7058
53	6649.2496	6663.7973	6678.3487	6692.9038	6707.4628	6722.0254	6736.5918	6751.1620	6765.7358	6780.3134
54	6794.8947	6809.4797	6824.0683	6838.6607	6853.2568	6867.8565	6882.4599	6897.0670	6911.6777	6926.2921
55	6940.9101	6955.5318	6970.1570	6984.7859	6999.4185	7014.0546	7028.6943	7043.3377	7057.9846	7072.6351
56	7087.2892	7101.9469	7116.6081	7131.2729	7145.9412	7160.6131	7175.2885	7189.9675	7204.6499	7219.3359
57	7234.0255	7248.7185	7263.4150	7278.1150	7292.8185	7307.5255	7322.2360	7336.9500	7351.6674	7366.3883
58	7381.1126	7395.8404	7410.5716	7425.3063	7440.0443	7454.7859	7469.5308	7484.2791	7499.0309	7513.7860
59	7528.5446	7543.3065	7558.0719	7572.8406	7587.6126	7602.3881	7617.1669	7631.9490	7646.7345	7661.5234
60	7676.3156	7691.1111	7705.9100	7720.7121	7735.5176	7750.3264	7765.1385	7779.9540	7794.7727	7809.5947
61	7824.4199	7839.2485	7854.0803	7868.9154	7883.7538	7898.5954	7913.4403	7928.2884	7943.1397	7957.9943
62	7972.8522	7987.7132	8002.5775	8017.4450	8032.3157	8047.1896	8062.0667	8076.9470	8091.8304	8106.7171
63	8121.6070	8136.5000	8151.3962	8166.2956	8181.1981	8196.1037	8211.0126	8225.9245	8240.8396	8255.7579
64	8270.6793	8285.6038	8300.5314	8315.4621	8330.3960	8345.3329	8360.2730	8375.2161	8390.1623	8405.1117
65	8420.0641	8435.0196	8449.9781	8464.9397	8479.9044	8494.8722	8509.8430	8524.8168	8539.7937	8554.7736
66	8569.7566	8584.7426	8599.7316	8614.7236	8629.7187	8644.7168	8659.7178	8674.7219	8689.7290	8704.7391
67	8719.7521	8734.7682	8749.7872	8764.8092	8779.8342	8794.8621	8809.8930	8824.9269	8839.9637	8855.0035
68	8870.0462	8885.0919	8900.1405	8915.1920	8930.2464	8945.3038	8960.3641	8975.4273	8990.4934	9005.5625
69	9020.6344	9035.7092	9050.7870	9065.8676	9080.9511	9096.0375	9111.1267	9126.2189	9141.3139	9156.4117
70	9171.5125	9186.6161	9201.7225	9216.8318	9231.9439	9247.0589	9262.1767	9277.2974	9292.4208	9307.5471
71	9322.6763	9337.8082	9352.9429	9368.0805	9383.2209	9398.3640	9413.5100	9428.6588	9443.8103	9458.9646
72	9474.1217	9489.2816	9504.4443	9519.6097	9534.7779	9549.9489	9565.1226	9580.2991	9595.4783	9610.6603
73	9625.8450	9641.0325	9656.2227	9671.4156	9686.6113	9701.8096	9717.0107	9732.2146	9747.4211	9762.6303
74	9777.8423	9793.0569	9808.2743	9823.4943	9838.7171	9853.9425	9869.1706	9884.4014	9899.6349	9914.8710
75	9930.1098	9945.3513	9960.5954	9975.8422	9991.0917	10006.3438	10021.5986	10036.8560	10052.1160	10067.3787
76	10082.6440	10097.9120	10113.1826	10128.4558	10143.7316	10159.0100	10174.2911	10189.5748	10204.8610	10220.1499
77	10235.4414	10250.7355	10266.0321	10281.3314	10296.6333	10311.9377	10327.2447	10342.5543	10357.8665	10373.1812
78	10388.4985	10403.8184	10419.1408	10434.4658	10449.7933	10465.1234	10480.4561	10495.7913	10511.1290	10526.4693
79	10541.8121	10557.1574	10572.5052	10587.8556	10603.2085	10618.5640	10633.9219	10649.2824	10664.6453	10680.0108
80	10695.3788	10710.7492	10726.1222	10741.4977	10756.8756	10772.2561	10787.6390	10803.0244	10818.4123	10833.8026
81	10849.1955	10864.5908	10879.9886	10895.3888	10910.7915	10926.1966	10941.6042	10957.0143	10972.4268	10987.8417
82	11003.2591	11018.6789	11034.1012	11049.5259	11064.9530	11080.3826	11095.8146	11111.2490	11126.6858	11142.1250
83	11157.5667	11173.0107	11188.4572	11203.9060	11219.3573	11234.8110	11250.2670	11265.7255	11281.1863	11296.6495
84	11312.1152	11327.5832	11343.0535	11358.5263	11374.0014	11389.4789	11404.9588	11420.4410	11435.9256	11451.4125
85	11466.9018	11482.3934	11497.8874	11513.3838	11528.8825	11544.3835	11559.8869	11575.3926	11590.9006	11606.4110
86	11621.9237	11637.4387	11652.9561	11668.4758	11683.9977	11699.5220	11715.0487	11730.5776	11746.1088	11761.6424
87	11777.1782	11792.7163	11808.2568	11823.7995	11839.3445	11854.8918	11870.4414	11885.9933	11901.5474	11917.1039
88	11932.6626	11948.2235	11963.7868	11979.3523	11994.9201	12010.4901	12026.0624	12041.6370	12057.2138	12072.7929
89	12088.3742	12103.9578	12119.5436	12135.1316	12150.7219	12166.3145	12181.9092	12197.5062	12213.1054	12228.7069
90	12244.3106	12259.9165	12275.5246	12291.1349	12306.7475	12322.3622	12337.9792	12353.5984	12369.2198	12384.8434
91	12400.4692	12416.0972	12431.7273	12447.3597	12462.9943	12478.6310	12494.2700	12509.9111	12525.5544	12541.1999
92	12556.8476	12572.4974	12588.1494	12603.8036	12619.4599	12635.1184	12650.7791	12666.4419	12682.1069	12697.7740
93	12713.4433	12729.1148	12744.7884	12760.4641	12776.1420	12791.8220	12807.5042	12823.1885	12838.8749	12854.5635
94	12870.2542	12885.9470	12901.6419	12917.3390	12933.0382	12948.7395	12964.4429	12980.1485	12995.8561	13011.5659
95	13027.2778	13042.9917	13058.7078	13074.4260	13090.1463	13105.8687	13121.5931	13137.3197	13153.0483	13168.7791
96	13184.5119	13200.2468	13215.9838	13231.7229	13247.4640	13263.2072	13278.9525	13294.6999	13310.4493	13326.2008
97	13341.9544	13357.7100	13373.4677	13389.2274	13404.9892	13420.7531	13436.5190	13452.2869	13468.0569	13483.8290
98	13499.6030	13515.3792	13531.1573	13546.9375	13562.7198	13578.5040	13594.2903	13610.0787	13625.8690	13641.6614
99	13657.4559	13673.2522	13689.0506	13704.8511	13720.6536	13736.4580	13752.2645	13768.0730	13783.8835	13799.6960

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	13815 5106	13831 3271	13947 1456	13862 9661	13878 7886	13894 6131	13910 4395	13926 2680	13942 0985	13957 9309
101	13973 7653	13989 6017	14005 4401	14021 2805	14037 1228	14052 9671	14068 8134	14084 6616	14100 5118	14116 3640
102	14132 2181	14148 0742	14163 9323	14179 7923	14195 6543	14211 5182	14227 3840	14243 2519	14259 1216	14274 9934
103	14290 8670	14306 7426	14322 6201	14338 4996	14354 3810	14370 2644	14386 1497	14402 0369	14417 9260	14433 8171
104	14449 7101	14465 6050	14481 5018	14497 4006	14513 3012	14529 2038	14545 1083	14561 0147	14576 9231	14592 8333
105	14608 7454	14624 6595	14640 5754	14656 4933	14672 4130	14688 3347	14704 2582	14720 1836	14736 1110	14752 0402
106	14767 9713	14783 9043	14799 8391	14815 7759	14831 7145	14847 6551	14863 5975	14879 5417	14895 4879	14911 4359
107	14927 3858	14943 3376	14959 2912	14975 2467	14991 2041	15007 1633	15023 1244	15039 0873	15055 0521	15071 0187
108	15086 9873	15102 9576	15118 9298	15134 9039	15150 8798	15166 8575	15182 8371	15198 8186	15214 8018	15230 7869
109	15246 7739	15262 7627	15278 7533	15294 7457	15310 7400	15326 7361	15342 7340	15358 7338	15374 7354	15390 7388
110	15406 7440	15422 7510	15438 7599	15454 7706	15470 7831	15486 7974	15502 8135	15518 8314	15534 8511	15550 8726
111	15566 8960	15582 9211	15598 9480	15614 9767	15631 0073	15647 0396	15663 0737	15679 1096	15695 1473	15711 1868
112	15727 2281	15743 2711	15759 3160	15775 3626	15791 4110	15807 4612	15823 5132	15839 5669	15855 6224	15871 6797
113	15887 7388	15903 7996	15919 8622	15935 9266	15951 9927	15968 0606	15984 1303	16000 2017	16016 2749	16032 3498
114	16048 4265	16064 5049	16080 5851	16096 6671	16112 7508	16128 8362	16144 9234	16161 0123	16177 1030	16193 1954
115	16209 2896	16225 3855	16241 4832	16257 5825	16273 6836	16289 7865	16305 8911	16321 9974	16338 1054	16354 2152
116	16370 3267	16386 4399	16402 5548	16418 6715	16434 7898	16450 9099	16467 0317	16483 1553	16499 2805	16515 4075
117	16531 5361	16547 6665	16563 7986	16579 9324	16596 0679	16612 2051	16628 3440	16644 4845	16660 6268	16676 7708
118	16692 9165	16709 0639	16725 2130	16741 3638	16757 5162	16773 6704	16789 8262	16805 9838	16822 1430	16838 3039
119	16854 4664	16870 6307	16886 7966	16902 9642	16919 1335	16935 3045	16951 4771	16967 6515	16983 8274	17000 0051
120	17016 1844	17032 3654	17048 5480	17064 7324	17080 9183	17097 1060	17113 2953	17129 4862	17145 6789	17161 8731
121	17178 0690	17194 2666	17210 4659	17226 6667	17242 8693	17259 0734	17275 2793	17291 4867	17307 6958	17323 9066
122	17340 1190	17356 3330	17372 5487	17388 7660	17404 9849	17421 2055	17437 4277	17453 6515	17469 8770	17486 1041
123	17502 3328	17518 5632	17534 7952	17551 0288	17567 2640	17583 5008	17599 7393	17615 9794	17632 2211	17648 4644
124	17664 7093	17680 9559	17697 2040	17713 4538	17729 7051	17745 9581	17762 2127	17778 4689	17794 7267	17810 9861
125	17827 2471	17843 5097	17859 7739	17876 0397	17892 3071	17908 5760	17924 8466	17941 1188	17957 3925	17973 6679
126	17989 9448	18006 2234	18022 5035	18038 7852	18055 0685	18071 3533	18087 6398	18103 9278	18120 2174	18136 5086
127	18152 8013	18169 0957	18185 3916	18201 6890	18217 9881	18234 2887	18250 5909	18266 8947	18283 2000	18299 5069
128	18315 8153	18332 1253	18348 4369	18364 7500	18381 0647	18397 3810	18413 6988	18430 0181	18446 3391	18462 6615
129	18478 9855	18495 3111	18511 6382	18527 9669	18544 2971	18560 6289	18576 9622	18593 2970	18609 6334	18625 9713
130	18642 3108	18658 6518	18674 9944	18691 3384	18707 6841	18724 0312	18740 3799	18756 7301	18773 0819	18789 4351
131	18805 7899	18822 1463	18838 5041	18854 8635	18871 2244	18887 5868	18903 9508	18920 3162	18936 6832	18953 0517
132	18969 4217	18985 7933	19002 1663	19018 5409	19034 9169	19051 2945	19067 6736	19084 0542	19100 4363	19116 8199
133	19133 2050	19149 5916	19165 9798	19182 3694	19198 7605	19215 1531	19231 5473	19247 9429	19264 3400	19280 7386
134	19297 1387	19313 5403	19329 9434	19346 3480	19362 7540	19379 1616	19395 5706	19411 9812	19428 3932	19444 8067
135	19461 2217	19477 6381	19494 0561	19510 4755	19526 8964	19543 3187	19559 7426	19576 1679	19592 5947	19609 0230
136	19625 4527	19641 8840	19658 3166	19674 7508	19691 1864	19707 6235	19724 0621	19740 5021	19756 9435	19773 3865
137	19789 8309	19806 2768	19822 7241	19839 1729	19855 6231	19872 0748	19888 5279	19904 9825	19921 4386	19937 8961
138	19954 3550	19970 8154	19987 2773	20003 7406	20020 2053	20036 6715	20053 1391	20069 6082	20086 0787	20102 5507
139	20119 0241	20135 4999	20151 9752	20168 4529	20184 9321	20201 4126	20217 8947	20234 3781	20250 8630	20267 3493
140	20283 8370	20300 3262	20316 8168	20333 3088	20349 8023	20366 2972	20382 7935	20399 2912	20415 7903	20432 2909
141	20448 7929	20465 2963	20481 8011	20498 3073	20514 8149	20531 3240	20547 8345	20564 3464	20580 8597	20597 3744
142	20613 8905	20630 4080	20646 9270	20663 4473	20679 9691	20696 4922	20713 0168	20729 5427	20746 0701	20762 5988
143	20779 1290	20795 6606	20812 1935	20828 7279	20845 2636	20861 8008	20878 3393	20894 8792	20911 4206	20927 9633
144	20944 5074	20961 0529	20977 5997	20994 1480	21010 6977	21027 2487	21043 8011	21060 3549	21076 9101	21093 4667
145	21110 0246	21126 5839	21143 1447	21159 7067	21176 2702	21192 8350	21209 4012	21225 9688	21242 5378	21259 1081
146	21275 6798	21292 2529	21308 8273	21325 4031	21341 9803	21358 5588	21375 1387	21391 7200	21408 3026	21424 8866
147	21441 4720	21458 0587	21474 6468	21491 2362	21507 8270	21524 4191	21541 0126	21557 6075	21574 2037	21590 8013
148	21607 4002	21624 0005	21640 6021	21657 2051	21673 8094	21690 4151	21707 0221	21723 6304	21740 2401	21756 8512
149	21773 4636	21790 0773	21806 6924	21823 3088	21839 9265	21856 5456	21873 1661	21889 7878	21906 4109	21923 0354

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
150	21939.6612	21956.2883	21972.9167	21989.5465	22006.1776	22022.8100	22039.4438	22056.0789	22072.7153	22089.3530
151	22105.9921	22122.6325	22139.2742	22155.9172	22172.5616	22189.2073	22205.8543	22222.5026	22239.1522	22255.8032
152	22272.4555	22289.1091	22305.7640	22322.4202	22339.0777	22355.7366	22372.3967	22389.0582	22405.7209	22422.3850
153	22439.0504	22455.7171	22472.3851	22489.0544	22505.7251	22522.3970	22539.0702	22555.7447	22572.4205	22589.0977
154	22605.7761	22622.4558	22639.1368	22655.8192	22672.5028	22689.1877	22705.8739	22722.5614	22739.2502	22755.9403
155	22772.6317	22789.3243	22806.0183	22822.7135	22839.4100	22856.1079	22872.8070	22889.5074	22906.2090	22922.9120
156	22939.6162	22956.3218	22973.0286	22989.7366	23006.4460	23023.1567	23039.8686	23056.5818	23073.2962	23090.0120
157	23106.7290	23123.4473	23140.1669	23156.8877	23173.6099	23190.3332	23207.0579	23223.7838	23240.5110	23257.2395
158	23273.9692	23290.7002	23307.4324	23324.1660	23340.9008	23357.6368	23374.3741	23391.1127	23407.8525	23424.5936
159	23441.3360	23458.0796	23474.8244	23491.5706	23508.3179	23525.0666	23541.8164	23558.5676	23575.3200	23592.0736
160	23608.8285	23625.5846	23642.3420	23659.1007	23675.8606	23692.6217	23709.3841	23726.1477	23742.9126	23759.6787
161	23776.4461	23793.2147	23809.9845	23826.7556	23843.5279	23860.3015	23877.0763	23893.8523	23910.6295	23927.4081
162	23944.1879	23960.9688	23977.7510	23994.5345	24011.3191	24028.1051	24044.8922	24061.6806	24078.4702	24095.2610
163	24112.0531	24128.8463	24145.6409	24162.4366	24179.2335	24196.0317	24212.8311	24229.6318	24246.4336	24263.2367
164	24280.0410	24296.8465	24313.6532	24330.4612	24347.2703	24364.0807	24380.8923	24397.7051	24414.5192	24431.3344
165	24448.1509	24464.9685	24481.7874	24498.6075	24515.4288	24532.2513	24549.0750	24565.9000	24582.7261	24599.5534
166	24616.3820	24633.2117	24650.0427	24666.8748	24683.7082	24700.5427	24717.3785	24734.2155	24751.0536	24767.8930
167	24784.7335	24801.5753	24818.4183	24835.2624	24852.1077	24868.9543	24885.8020	24902.6509	24919.5011	24936.3524
168	24953.2049	24970.0586	24986.9135	25003.7695	25020.6268	25037.4852	25054.3449	25071.2057	25088.0677	25104.9309
169	25121.7953	25138.6608	25155.5276	25172.3955	25189.2646	25206.1349	25223.0064	25239.8790	25256.7528	25273.6278
170	25290.5040	25307.3814	25324.2599	25341.1396	25358.0205	25374.9025	25391.7858	25408.6702	25425.5557	25442.4425
171	25459.3304	25476.2195	25493.1097	25510.0011	25526.8937	25543.7875	25560.6824	25577.5785	25594.4757	25611.3741
172	25628.2737	25645.1745	25662.0764	25678.9794	25695.8837	25712.7890	25729.6956	25746.6033	25763.5121	25780.4222
173	25797.3333	25814.2457	25831.1592	25848.0738	25864.9896	25881.9065	25898.8246	25915.7439	25932.6643	25949.5859
174	25966.5085	25983.4324	26000.3574	26017.2836	26034.2109	26051.1393	26068.0689	26084.9997	26101.9315	26118.8646
175	26135.7987	26152.7340	26169.6705	26186.6081	26203.5468	26220.4867	26237.4277	26254.3699	26271.3132	26288.2576
176	26305.2032	26322.1499	26339.0977	26356.0467	26372.9968	26389.9481	26406.9005	26423.8540	26440.8086	26457.7644
177	26474.7213	26491.6793	26508.6385	26525.5988	26542.5602	26559.5227	26576.4864	26593.4512	26610.4171	26627.3842
178	26644.3524	26661.3217	26678.2921	26695.2636	26712.2363	26729.2101	26746.1850	26763.1610	26780.1382	26797.1164
179	26814.0958	26831.0763	26848.0579	26865.0407	26882.0245	26899.0095	26915.9956	26932.9827	26949.9711	26966.9605
180	26983.9510	27000.9426	27017.9354	27034.9292	27051.9242	27068.9203	27085.9175	27102.9158	27119.9152	27136.9157
181	27153.9173	27170.9200	27187.9238	27204.9288	27221.9348	27238.9419	27255.9501	27272.9595	27289.9699	27306.9814
182	27323.9941	27341.0078	27358.0226	27375.0386	27392.0556	27409.0737	27426.0929	27443.1133	27460.1347	27477.1572
183	27494.1808	27511.2054	27528.2312	27545.2581	27562.2861	27579.3151	27596.3453	27613.3765	27630.4088	27647.4422
184	27664.4767	27681.5123	27698.5490	27715.5867	27732.6256	27749.6655	27766.7065	27783.7486	27800.7918	27817.8361
185	27834.8814	27851.9278	27868.9753	27886.0239	27903.0736	27920.1243	27937.1761	27954.2290	27971.2830	27988.3380
186	28005.3942	28022.4514	28039.5096	28056.5690	28073.6294	28090.6909	28107.7535	28124.8171	28141.8818	28158.9476
187	28176.0145	28193.0824	28210.1514	28227.2214	28244.2926	28261.3648	28278.4380	28295.5124	28312.5878	28329.6642
188	28346.7417	28363.8203	28380.9000	28397.9807	28415.0625	28432.1453	28449.2292	28466.3141	28483.4002	28500.4872
189	28517.5754	28534.6646	28551.7548	28568.8461	28585.9385	28603.0319	28620.1264	28637.2219	28654.3185	28671.4161
190	28688.5148	28705.6146	28722.7154	28739.8172	28756.9201	28774.0241	28791.1291	28808.2351	28825.3422	28842.4504
191	28859.5596	28876.6698	28893.7811	28910.8934	28928.0068	28945.1212	28962.2367	28979.3532	28996.4707	29013.5893
192	29030.7090	29047.8297	29064.9514	29082.0742	29099.1980	29116.3228	29133.4487	29150.5756	29167.7036	29184.8326
193	29201.9626	29219.0937	29236.2258	29253.3589	29270.4931	29287.6283	29304.7645	29321.9018	29339.0401	29356.1794
194	29373.3198	29390.4612	29407.6037	29424.7471	29441.8916	29459.0371	29476.1837	29493.3313	29510.4799	29527.6295
195	29544.7801	29561.9318	29579.0845	29596.2383	29613.3930	29630.5488	29647.7056	29664.8634	29682.0223	29699.1821
196	29716.3430	29733.5049	29750.6679	29767.8318	29784.9968	29802.1628	29819.3298	29836.4978	29853.6668	29870.8369
197	29888.0080	29905.1800	29922.3531	29939.5273	29956.7024	29973.8785	29991.0557	30008.2338	30025.4130	30042.5932
198	30059.7744	30076.9566	30094.1398	30111.3241	30128.5093	30145.6955	30162.8828	30180.0711	30197.2603	30214.4506
199	30231.6419	30248.8342	30266.0274	30283.2217	30300.4170	30317.6133	30334.8106	30352.0089	30369.2082	30386.4085

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
200	30403 6098	30420 8121	30438 0154	30455.2198	30472.4251	30489.6314	30506.8386	30524 0469	30541.2562	30558.4665
201	30575 6778	30592.8901	30610 1034	30627.3176	30644.5329	30661.7491	30678 9664	30696.1846	30713.4038	30730.6241
202	30747 8453	30765 0675	30782 2907	30799.5148	30816.7400	30833.9662	30851.1933	30868.4214	30885.6506	30902.8807
203	30920 1118	30937 3438	30954 5769	30971.8109	30989.0460	31006.2820	31023.5190	31040.7569	31057.9959	31075.2358
204	31092 4768	31109 7187	31126.9615	31144.2054	31161.4502	31178 6961	31195.9428	31213.1906	31230.4394	31247.6891
205	31264 9398	31282 1915	31299 4441	31316.6978	31333.9524	31351 2079	31368.4645	31385 7220	31402.9805	31420.2400
206	31437 5004	31454.7618	31472 0242	31489 2875	31506.5519	31523.8171	31541.0834	31558 3506	31575.6188	31592 8880
207	31610 1581	31627.4292	31644.7012	31661.9743	31679.2482	31696.5232	31713.7991	31731.0760	31748.3538	31765.6326
208	31782 9124	31800 1931	31817 4748	31834.7575	31852.0411	31869.3254	31886.6112	31903.8977	31921.1851	31938.4735
209	31955 7629	31973 0532	31990 3445	32007.6367	32024.9299	32042 2240	32059.5191	32076.8152	32094.1122	32111.4101
210	32128 7090	32146 0089	32163 3097	32180.6115	32197.9142	32215.2178	32232.5225	32249.8280	32267 1345	32284.4420
211	32301 7504	32319 0598	32336 3701	32353.6813	32370.9935	32388.3067	32405.6208	32422.9358	32440.2518	32457.5597
212	32474 8866	32492.2054	32509.5252	32526.8459	32544.1675	32561.4901	32578.8136	32596.1381	32613.4635	32630.7898
213	32648 1171	32665 4453	32682.7745	32700.1046	32717.4356	32734.7676	32752.1005	32769.4344	32786.7692	32804.1049
214	32821 4415	32838 7791	32856 1177	32873.4571	32890.7975	32908 1388	32925.4811	32942.8243	32960.1684	32977.5134
215	32994 8594	33012 2063	33029.5542	33046.9029	33064.2526	33081.6033	33098.9548	33116.3073	33133 6607	33151.0151
216	33168 3703	33185 7265	33203 0836	33220.4417	33237.8006	33255.1605	33272.5213	33289.8831	33307.2457	33324.6093
217	33341 9738	33359 3392	33376.7056	33394.0729	33411.4410	33428.8102	33446.1802	33463.5511	33480.9230	33498.2958
218	33515 6695	33533 0441	33550 4196	33567.7961	33585.1735	33602.5517	33619.9309	33637.3111	33654.6921	33672.0740
219	33689 4569	33706 8407	33724.2253	33741.6109	33758.9974	33776.3849	33793.7732	33811.1624	33828.5526	33845.9436
220	33863 3356	33880.7285	33898.1223	33915.5170	33932.9126	33950.3091	33967.7065	33985.1048	34002.5041	34019.9042
221	34037 3053	34054 7072	34072 1101	34089.5138	34106.9185	34124.3240	34141.7305	34159.1379	34176.5461	34193.9553
222	34211 3654	34228 7764	34246.1882	34263.6010	34281.0147	34298 4293	34315.8447	34333 2611	34350.6734	34368.0966
223	34385 5156	34402.9356	34420.3564	34437.7782	34455.2008	34472.6244	34490.0488	34507.4742	34524.9004	34542.3275
224	34559 7555	34577.1844	34594.6142	34612.0449	34629.4765	34646.9090	34664.3424	34681.7766	34699.2118	34716.6478
225	34734 0847	34751 5225	34768.9612	34786.4008	34803.8413	34821.2827	34838.7249	34856.1681	34873.6121	34891.0570
226	34908 5028	34925.9495	34943.3971	34960.8455	34978.2949	34995.7451	35013.1962	35030.6482	35048.1010	35065.5548
227	35083 0094	35100 4649	35117 9213	35135.3786	35152.8367	35170.2958	35187.7557	35205.2165	35222.6781	35240.1407
228	35257 6041	35275 0684	35292.5336	35309.9996	35327.4666	35344.9344	35362.4030	35379.8726	35397.3430	35414.8143
229	35432.2865	35449.7596	35467.2335	35484.7083	35502.1839	35519.6605	35537.1379	35554.6162	35572.0953	35589.5754
230	35607 0562	35624.5380	35642 0206	35659 5041	35676.9885	35694.4738	35711.9599	35729.4468	35746 9347	35764.4234
231	35781.9130	35799.4034	35816.8947	35834.3869	35851.8799	35869.3738	35886.8686	35904.3642	35921.8607	35939.3580
232	35956 8562	35974.3553	35991 8552	36009.3560	36026.8577	36044.3602	36061.8636	36079.3679	36096.8730	36114.3789
233	36131 8857	36149 3934	36166 9019	36184.4113	36201.9216	36219.4327	36236.9446	36254.4575	36271.9711	36289.4857
234	36307.0011	36324.5173	36342.0344	36359.5523	36377.0711	36394.5908	36412.1113	36429.6327	36447.1549	36464.6779
235	36482.2019	36499 7266	36517 2522	36534.7787	36552.3060	36569.8342	36587.3632	36604.8931	36622.4238	36639.9553
236	36657.4878	36675.0210	36692.5551	36710.0901	36727.6259	36745.1625	36762.7000	36780.2383	36797.7775	36815.3175
237	36832.8584	36850.4001	36867.9427	36885.4861	36903.0303	36920.5754	36938.1213	36955.6681	36973.2157	36990.7642
238	37008 3134	37025 8636	37043 4146	37060.9664	37078.5190	37096.0725	37113.6268	37131.1820	37148.7380	37166.2948
239	37183.8525	37201 4110	37218 9704	37236.5306	37254.0916	37271.6535	37289.2162	37306.7797	37324.3440	37341.9092
240	37359 4753	37377 0421	37394 6098	37412.1784	37429.7477	37447.3179	37464.8890	37482.4608	37500.0335	37517.6070
241	37535 1814	37552.7565	37570.3326	37587.9094	37605.4871	37623.0656	37640.6449	37658.2250	37675.8060	37693.3878
242	37710 9704	37728.5539	37746.1382	37763.7233	37781.3092	37798.8960	37816.4835	37834.0720	37851.6612	37869.2513
243	37886 8422	37904.4339	37922.0264	37939.6197	37957.2139	37974.8089	37992.4047	38010.0014	38027.5988	38045.1971
244	39062 7962	38080 3961	38097 9968	38115.5984	38133.2008	38150.8040	38168.4080	38186.0128	38203.6184	38221.2249
245	38238.8322	38256 4403	38274.0492	38291.6589	38309.2695	38326.8808	38344.4930	38362.1060	38379.7198	38397.3344
246	38414.9498	38432.5661	38450.1831	38467.8010	38485.4196	38503.0391	38520.6594	38538.2805	38555.9025	38573.5252
247	38591.1487	38608.7731	38626 3983	38644 0242	38661.6510	38679.2786	38696.9070	38714.5362	38732.1662	38749.7970
248	38767 4286	38785.0611	38802.6943	38820.3284	38837.9632	38855.5989	38873.2353	38890 8726	38908 5106	38926.1495
249	38943 7892	38961 4297	38979 0709	38996.7130	39014.3559	39031.9996	39049.6441	39067.2894	39084 9355	39102.5824

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
250	39120.2701	39137.8785	39155.5278	39173.1779	39190.8288	39208.4805	39226.1330	39243.7863	39261.4404	39279.0952
251	39296.7509	39314.4074	39332.0647	39349.7227	39367.3816	39385.0413	39402.7017	39420.3630	39438.0252	39455.6878
252	39473.3515	39491.0159	39508.6811	39526.3471	39544.0139	39561.6815	39579.3499	39597.0191	39614.6891	39632.3598
253	39650.0314	39667.7037	39685.3769	39703.0508	39720.7255	39738.4010	39756.0773	39773.7544	39791.4322	39809.1109
254	39826.7903	39844.4706	39862.1516	39879.8334	39897.5160	39915.1994	39932.8835	39950.5685	39968.2542	39985.9407
255	40003.6281	40021.3161	40039.0050	40056.6947	40074.3851	40092.0763	40109.7683	40127.4611	40145.1547	40162.8491
256	40180.5442	40198.2401	40215.9368	40233.6343	40251.3325	40269.0316	40286.7314	40304.4320	40322.1334	40339.8355
257	40357.5385	40375.2422	40392.9467	40410.6519	40428.3580	40446.0648	40463.7724	40481.4808	40499.1899	40516.8998
258	40534.6105	40552.3220	40570.0343	40587.7473	40605.4611	40623.1757	40640.8910	40658.6071	40676.3240	40694.0417
259	40711.7601	40729.4794	40747.1993	40764.9201	40782.6416	40800.3639	40818.0870	40835.8108	40853.5354	40871.2608
260	40888.9870	40906.7139	40924.4416	40942.1700	40959.8992	40977.6292	40995.3600	41013.0915	41030.8238	41048.5569
261	41066.2907	41084.0253	41101.7607	41119.4968	41137.2337	41154.9713	41172.7098	41190.4489	41208.1889	41225.9296
262	41243.6711	41261.4133	41279.1563	41296.9001	41314.6446	41332.3899	41350.1360	41367.8828	41385.6304	41403.3787
263	41421.1278	41438.8777	41456.6283	41474.3797	41492.1318	41509.8847	41527.6383	41545.3928	41563.1479	41580.9039
264	41598.6606	41616.4180	41634.1762	41651.9352	41669.6949	41687.4554	41705.2166	41722.9786	41740.7413	41758.5048
265	41776.2691	41794.0341	41811.7998	41829.5664	41847.3336	41865.1016	41882.8704	41900.6400	41918.4102	41936.1813
266	41953.9531	41971.7256	41989.4989	42007.2729	42025.0477	42042.8233	42060.5996	42078.3766	42096.1544	42113.9329
267	42131.7122	42149.4923	42167.2731	42185.0546	42202.8369	42220.6199	42238.4037	42256.1882	42273.9735	42291.7595
268	42309.5463	42327.3338	42345.1221	42362.9111	42380.7009	42398.4914	42416.2826	42434.0746	42451.8673	42469.6608
269	42487.4550	42505.2500	42523.0457	42540.8421	42558.6393	42576.4373	42594.2360	42612.0354	42629.8355	42647.6364
270	42665.4381	42683.2405	42701.0436	42718.8475	42736.6521	42754.4574	42772.2635	42790.0703	42807.8779	42825.6862
271	42843.4953	42861.3050	42879.1155	42896.9268	42914.7387	42932.5515	42950.3649	42968.1791	42985.9941	43003.8097
272	43021.6261	43039.4433	43057.2612	43075.0798	43092.8991	43110.7192	43128.5400	43146.3616	43164.1838	43182.0069
273	43199.8306	43217.6551	43235.4803	43253.3062	43271.1329	43288.9603	43306.7885	43324.6173	43342.4469	43360.2773
274	43378.1083	43395.9401	43413.7726	43431.6059	43449.4399	43467.2746	43485.1100	43502.9462	43520.7831	43538.6207
275	43556.4590	43574.2981	43592.1379	43609.9785	43627.8197	43645.6617	43663.5044	43681.3478	43699.1920	43717.0369
276	43734.8825	43752.7288	43770.5759	43788.4237	43806.2722	43824.1214	43841.9714	43859.8220	43877.6734	43895.5256
277	43913.3784	43931.2320	43949.0863	43966.9413	43984.7970	44002.6534	44020.5106	44038.3685	44056.2271	44074.0865
278	44091.9465	44109.8073	44127.6688	44145.5310	44163.3939	44181.2576	44199.1219	44216.9870	44234.8528	44252.7193
279	44270.5866	44288.4545	44306.3232	44324.1926	44342.0627	44359.9335	44377.8050	44395.6773	44413.5502	44431.4239
280	44449.2983	44467.1734	44485.0492	44502.9258	44520.8030	44538.6810	44556.5596	44574.4390	44592.3191	44610.1999
281	44628.0815	44645.9637	44663.8466	44681.7303	44699.6147	44717.4998	44735.3855	44753.2720	44771.1593	44789.0472
282	44806.9358	44824.8251	44842.7152	44860.6059	44878.4974	44896.3896	44914.2825	44932.1761	44950.0704	44967.9654
283	44985.8611	45003.7575	45021.6546	45039.5524	45057.4510	45075.3502	45093.2502	45111.1508	45129.0522	45146.9542
284	45164.8570	45182.7605	45200.6646	45218.5695	45236.4751	45254.3814	45272.2884	45290.1961	45308.1045	45326.0136
285	45343.9234	45361.8339	45379.7451	45397.6570	45415.5696	45433.4829	45451.3969	45469.3116	45487.2270	45505.1431
286	45523.0599	45540.9774	45558.8956	45576.8145	45594.7341	45612.6544	45630.5754	45648.4971	45666.4195	45684.3426
287	45702.2664	45720.1908	45738.1160	45756.0419	45773.9685	45791.8957	45809.8237	45827.7524	45845.6817	45863.6118
288	45881.5425	45899.4739	45917.4061	45935.3389	45953.2724	45971.2066	45989.1415	46007.0771	46025.0134	46042.9504
289	46060.8881	46078.8265	46096.7655	46114.7053	46132.6457	46150.5869	46168.5287	46186.4712	46204.4144	46222.3583
290	46240.3029	46258.2482	46276.1941	46294.1408	46312.0881	46330.0362	46347.9849	46365.9343	46383.8844	46401.8352
291	46419.7867	46437.7388	46455.6917	46473.6452	46491.5994	46509.5543	46527.5099	46545.4662	46563.4232	46581.3808
292	46599.3391	46617.2982	46635.2579	46653.2183	46671.1793	46689.1411	46707.1035	46725.0667	46743.0305	46760.9950
293	46778.9601	46796.9260	46814.8925	46832.8598	46850.8277	46868.7962	46886.7655	46904.7355	46922.7061	46940.6774
294	46958.6494	46976.6220	46994.5954	47012.5694	47030.5441	47048.5195	47066.4956	47084.4723	47102.4496	47120.4279
295	47138.4067	47156.3861	47174.3662	47192.3471	47210.3286	47228.3107	47246.2936	47264.2771	47282.2613	47300.2462
296	47318.2317	47336.2179	47354.2048	47372.1924	47390.1807	47408.1696	47426.1592	47444.1495	47462.1404	47480.1321
297	47498.1244	47516.1173	47534.1110	47552.1053	47570.1003	47588.0959	47606.0923	47624.0893	47642.0870	47660.0853
298	47678.0843	47696.0840	47714.0844	47732.0854	47750.0871	47768.0895	47786.0925	47804.0963	47822.1006	47840.1057
299	47858.1114	47876.1178	47894.1249	47912.1326	47930.1410	47948.1501	47966.1598	47984.1702	48002.1813	48020.1930

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
300	48038.2054	48056.2185	48074.2322	48092.2466	48110.2617	48128.2774	48146.2938	48164.3109	48182.3286	48200.3470
301	49218.3661	48236.3858	48254.4062	48272.4272	48290.4489	48308.4713	48326.4944	48344.5181	48362.5424	48380.5675
302	48398.5931	48416.6195	48434.6465	48452.6742	48470.7025	48488.7315	48506.7612	48524.7915	48542.8225	48560.8542
303	48578.8865	48596.9194	48614.9531	48632.9873	48651.0223	48669.0579	48687.0942	48705.1311	48723.1687	48741.2069
304	48759.2458	48777.2853	48795.3256	48813.3664	48831.4080	48849.4501	48867.4930	48885.5365	48903.5806	48921.6254
305	48939.6709	48957.7170	48975.7638	48993.8112	49011.8593	49029.9081	49047.9575	49066.0075	49084.0582	49102.1096
306	49120.1616	49139.2143	49156.2676	49174.3216	49192.3762	49210.4315	49228.4874	49246.5440	49264.6012	49282.6591
307	49300.7176	49318.7768	49336.8367	49354.8972	49372.9583	49391.0201	49409.0826	49427.1456	49445.2094	49463.2738
308	49481.3388	49499.4045	49517.4709	49535.5379	49553.6055	49571.6738	49589.7427	49607.8123	49625.8826	49643.9534
309	49662.0250	49680.0971	49698.1700	49716.2434	49734.3176	49752.3923	49770.4677	49788.5438	49806.6205	49824.6978
310	49842.7758	49860.8545	49878.9337	49897.0137	49915.0942	49933.1755	49951.2573	49969.3398	49987.4230	50005.5068
311	50023.5912	50041.6763	50059.7620	50077.8484	50095.9354	50114.0230	50132.1113	50150.2002	50168.2898	50186.3800
312	50204.4709	50222.5624	50240.6545	50258.7473	50276.8407	50294.9348	50313.0295	50331.1248	50349.2208	50367.3174
313	50385.4147	50403.5126	50421.6111	50439.7103	50457.8101	50475.9105	50494.0116	50512.1133	50530.2157	50548.3187
314	50566.4223	50584.5266	50602.6315	50620.7371	50638.8433	50656.9501	50675.0575	50693.1656	50711.2743	50729.3837
315	50747.4937	50765.6043	50783.7156	50801.8275	50819.9400	50838.0532	50856.1670	50874.2815	50892.3965	50910.5122
316	50928.6286	50946.7455	50964.8630	50982.9814	51001.1003	51019.2198	51037.3399	51055.4607	51073.5821	51091.7041
317	51109.8267	51127.9500	51146.0739	51164.1985	51182.3237	51200.4495	51218.5759	51236.7030	51254.8307	51272.9590
318	51291.0880	51309.2176	51327.3478	51345.4786	51363.6101	51381.7422	51399.8749	51418.0083	51436.1423	51454.2769
319	51472.4121	51490.5480	51508.6845	51526.8216	51544.9594	51563.0977	51581.2367	51599.3763	51617.5166	51635.6575
320	51653.7990	51671.9411	51690.0838	51708.2272	51726.3712	51744.5158	51762.6611	51780.8070	51798.9534	51817.1006
321	51835.2483	51853.3967	51871.5457	51889.6953	51907.8455	51925.9964	51944.1478	51962.2999	51980.4526	51998.6059
322	52016.7600	52034.9145	52053.0697	52071.2256	52089.3820	52107.5391	52125.6968	52143.8551	52162.0140	52180.1735
323	52198.3337	52216.4945	52234.6559	52252.8179	52270.9806	52289.1438	52307.3077	52325.4722	52343.6373	52361.8030
324	52379.9694	52398.1364	52416.3039	52434.4721	52452.6410	52470.8104	52488.9804	52507.1511	52525.3224	52543.4943
325	52561.6668	52579.8399	52598.0137	52616.1880	52634.3630	52652.5386	52670.7148	52688.8916	52707.0690	52725.2471
326	52743.4257	52761.6050	52779.7849	52797.9654	52816.1465	52834.3282	52852.5106	52870.6935	52888.8771	52907.0612
327	52925.2460	52943.4314	52961.6174	52979.8040	52997.9913	53016.1791	53034.3676	53052.5566	53070.7463	53088.9366
328	53107.1275	53125.3190	53143.5111	53161.7038	53179.8971	53198.0911	53216.2856	53234.4808	53252.6766	53270.8729
329	53289.0699	53307.2675	53325.4657	53343.6645	53361.8639	53380.0639	53398.2646	53416.4658	53434.6676	53452.8701
330	53471.0731	53489.2768	53507.4811	53525.6859	53543.8914	53562.0975	53580.3042	53598.5115	53616.7194	53634.9279
331	53653.1370	53671.3467	53689.5570	53707.7679	53725.9794	53744.1915	53762.4043	53780.6176	53798.8315	53817.0461
332	53835.2612	53853.4770	53871.6933	53889.9102	53908.1278	53926.3459	53944.5647	53962.7840	53981.0040	53999.2245
333	54017.4457	54035.6675	54053.8898	54072.1128	54090.3363	54108.5605	54126.7852	54145.0106	54163.2365	54181.4631
334	54199.6903	54217.9180	54236.1464	54254.3753	54272.6049	54290.8350	54309.0657	54327.2971	54345.5290	54363.7616
335	54381.9947	54400.2284	54418.4627	54436.6977	54454.9332	54473.1693	54491.4060	54509.6433	54527.8812	54546.1197
336	54564.3588	54582.5985	54600.8388	54619.0797	54637.3211	54655.5632	54673.8059	54692.0491	54710.2930	54728.5374
337	54746.7825	54765.0281	54783.2743	54801.5212	54819.7686	54838.0166	54856.2652	54874.5144	54892.7641	54911.0145
338	54929.2655	54947.5170	54965.7692	54984.0219	55002.2753	55020.5292	55038.7837	55057.0388	55075.2945	55093.5508
339	55111.8077	55130.0651	55148.3232	55166.5818	55184.8411	55203.1009	55221.3613	55239.6223	55257.8839	55276.1461
340	55294.4088	55312.6722	55330.9361	55349.2007	55367.4658	55385.7315	55403.9978	55422.2647	55440.5321	55458.8002
341	55477.0688	55495.3381	55513.6079	55531.8783	55550.1493	55568.4208	55586.6930	55604.9657	55623.2391	55641.5130
342	55659.7875	55678.0626	55696.3382	55714.6145	55732.8913	55751.1687	55769.4467	55787.7253	55806.0045	55824.2843
343	55842.5646	55860.8455	55879.1270	55897.4091	55915.6918	55933.9750	55952.2589	55970.5433	55988.8283	56007.1139
344	56025.4000	56043.6868	56061.9741	56080.2620	56098.5505	56116.8396	56135.1292	56153.4195	56171.7103	56190.0017
345	56208.2936	56226.5862	56244.8793	56263.1730	56281.4673	56299.7622	56318.0576	56336.3536	56354.6502	56372.9474
346	56391.2452	56409.5435	56427.8424	56446.1419	56464.4420	56482.7426	56501.0439	56519.3457	56537.6480	56555.9510
347	56574.2545	56592.5586	56610.8633	56629.1686	56647.4744	56665.7808	56684.0878	56702.3954	56720.7035	56739.0122
348	56757.3215	56775.6314	56793.9418	56812.2528	56830.5644	56848.8766	56867.1893	56885.5026	56903.8165	56922.1309
349	56940.4460	56958.7616	56977.0777	56995.3945	57013.7118	57032.0297	57050.3482	57068.6672	57086.9868	57105.3070

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
350	57123.6277	57141.9491	57160.2709	57178.5934	57196.9164	57215.2401	57233.5642	57251.8890	57270.2143	57288.5402
351	57306.8666	57325.1937	57343.5213	57361.8494	57380.1782	57398.5075	57416.8373	57435.1678	57453.4988	57471.8304
352	57490.1625	57508.4952	57526.8285	57545.1624	57563.4968	57581.8318	57600.1673	57618.5035	57636.8402	57655.1774
353	57673.5152	57691.9536	57710.1926	57728.5321	57746.8722	57765.2128	57783.5541	57801.8959	57820.2382	57838.5811
354	57856.9246	57875.2686	57893.6133	57911.9584	57930.3042	57948.6505	57966.9974	57985.3448	58003.6928	58022.0413
355	58040.3905	58058.7402	58077.0904	58095.4412	58113.7926	58132.1445	58150.4970	58168.8501	58187.2037	58205.5579
356	58223.9127	58242.2680	58260.6239	58278.9803	58297.3373	58315.6948	58334.0530	58352.4116	58370.7709	58389.1307
357	58407.4910	58425.8520	58444.2134	58462.5755	58480.9381	58499.3013	58517.6650	58536.0293	58554.3941	58572.7595
358	58591.1254	58609.4920	58627.8590	58646.2267	58664.5949	58682.9636	58701.3329	58719.7028	58738.0732	58756.4442
359	58774.8157	58793.1878	58811.5605	58829.9337	58848.3074	58866.6818	58885.0566	58903.4321	58921.8081	58940.1846
360	58958.5617	58976.9394	58995.3176	59013.6963	59032.0757	59050.4555	59068.8360	59087.2169	59105.5985	59123.9806
361	59142.3632	59160.7464	59179.1302	59197.5145	59215.8994	59234.2848	59252.6708	59271.0573	59289.4444	59307.8320
362	59326.2202	59344.6089	59362.9982	59381.3880	59399.7784	59418.1694	59436.5609	59454.9529	59473.3455	59491.7387
363	59510.1324	59528.5266	59546.9214	59565.3168	59583.7127	59602.1091	59620.5061	59638.9037	59657.3018	59675.7004
364	59694.0996	59712.4994	59730.8997	59749.3005	59767.7019	59786.1039	59804.5064	59822.9094	59841.3130	59859.7172
365	59878.1219	59896.5271	59914.9329	59933.3392	59951.7461	59970.1535	59988.5615	60006.9700	60025.3791	60043.7887
366	60062.1989	60080.6096	60099.0208	60117.4327	60135.8450	60154.2579	60172.6713	60191.0853	60209.4998	60227.9149
367	60246.3305	60264.7467	60283.1634	60301.5807	60319.9985	60338.4168	60356.8357	60375.2551	60393.6751	60412.0956
368	60430.5167	60448.9383	60467.3605	60485.7832	60504.2064	60522.6302	60541.0545	60559.4794	60577.9048	60596.3307
369	60614.7572	60633.1843	60651.6118	60670.0399	60688.4686	60706.8978	60725.3276	60743.7578	60762.1887	60780.6200
370	60799.0519	60817.4844	60835.9174	60854.3509	60872.7850	60891.2196	60909.6547	60928.0904	60946.5266	60964.9634
371	60983.4007	61001.8385	61020.2769	61038.7158	61057.1553	61075.5953	61094.0358	61112.4769	61130.9185	61149.3607
372	61167.8034	61186.2466	61204.6904	61223.1347	61241.5795	61260.0249	61278.4708	61296.9172	61315.3642	61333.8117
373	61352.2598	61370.7084	61389.1575	61407.6072	61426.0574	61444.5081	61462.9594	61481.4112	61499.8636	61518.3164
374	61536.7699	61555.2238	61573.6783	61592.1333	61610.5889	61629.0450	61647.5016	61665.9587	61684.4164	61702.8746
375	61721.3334	61739.7927	61758.2525	61776.7129	61795.1737	61813.6352	61832.0971	61850.5596	61869.0226	61887.4862
376	61905.9503	61924.4149	61942.8800	61961.3457	61979.8119	61998.2786	62016.7459	62035.2137	62053.6821	62072.1509
377	62090.6203	62109.0902	62127.5607	62146.0317	62164.5032	62182.9752	62201.4478	62219.9209	62238.3946	62256.8687
378	62275.3434	62293.8186	62312.2944	62330.7707	62349.2475	62367.7248	62386.2027	62404.6811	62423.1600	62441.6395
379	62460.1194	62478.5999	62497.0810	62515.5625	62534.0446	62552.5272	62571.0104	62589.4941	62607.9783	62626.4630
380	62644.9482	62663.4340	62681.9203	62700.4071	62718.8945	62737.3824	62755.8708	62774.3597	62792.8492	62811.3391
381	62829.8296	62848.3207	62866.8122	62885.3043	62903.7969	62922.2901	62940.7837	62959.2779	62977.7726	62996.2678
382	63014.7636	63033.2598	63051.7566	63070.2539	63088.7518	63107.2502	63125.7490	63144.2485	63162.7484	63181.2489
383	63199.7499	63218.2513	63236.7534	63255.2559	63273.7590	63292.2626	63310.7667	63329.2713	63347.7764	63366.2821
384	63384.7883	63403.2950	63421.8023	63440.3100	63458.8183	63477.3271	63495.8364	63514.3463	63532.8566	63551.3675
385	63569.8789	63588.3908	63606.9032	63625.4162	63643.9297	63662.4437	63680.9582	63699.4732	63717.9888	63736.5048
386	63755.0214	63773.5385	63792.0561	63810.5743	63829.0929	63847.6121	63866.1318	63884.6520	63903.1727	63921.6940
387	63940.2157	63958.7380	63977.2608	63995.7841	64014.3080	64032.8323	64051.3572	64069.8825	64088.4084	64106.9348
388	64125.4618	64143.9892	64162.5171	64181.0456	64199.5746	64218.1041	64236.6341	64255.1646	64273.6957	64292.2272
389	64310.7593	64329.2919	64347.8250	64366.3586	64384.8927	64403.4274	64421.9625	64440.4982	64458.0344	64477.5711
390	64496.1083	64514.6460	64533.1842	64551.7230	64570.2622	64588.8020	64607.3423	64625.8831	64644.4244	64662.9662
391	64681.5085	64700.0514	64718.5947	64737.1386	64755.6830	64774.2279	64792.7733	64811.3192	64829.8655	64848.4125
392	64866.9600	64885.5079	64904.0564	64922.6053	64941.1548	64959.7048	64978.2553	64996.8063	65015.3578	65033.9098
393	65052.4624	65071.0154	65089.5690	65108.1230	65126.6776	65145.2327	65163.7883	65182.3444	65200.9010	65219.4581
394	65238.0157	65256.5738	65275.1325	65293.6916	65312.2512	65330.8114	65349.3721	65367.9332	65386.4949	65405.0571
395	65423.6198	65442.1830	65460.7467	65479.3109	65497.8756	65516.4408	65535.0065	65553.5728	65572.1395	65590.7067
396	65609.2745	65627.8427	65646.4115	65664.9808	65683.5505	65702.1208	65720.6916	65739.2628	65757.8346	65776.4069
397	65794.9797	65813.5530	65832.1268	65850.7011	65869.2759	65887.8512	65906.4270	65925.0033	65943.5802	65962.1575
398	65980.7353	65999.3136	66017.8925	66036.4718	66055.0516	66073.6320	66092.2128	66110.7941	66129.3760	66147.9583
399	66166.5411	66185.1245	66203.7083	66222.2927	66240.8775	66259.4629	66278.0487	66296.6351	66315.2219	66333.8093

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
400	66352 3971	66370 9855	66389 5743	66408 1637	66426 7535	66445 3439	66463 9347	66482 5261	66501 1179	66519 7102
401	66538 3031	66556 8964	66575 4903	66594 0846	66612 6795	66631 2748	66649 8706	66668 4670	66687 0638	66705 6611
402	66724 2589	66742 8573	66761 4561	66780 0554	66798 6552	66817 2555	66835 8563	66854 4576	66873 0594	66891 6617
403	66910 2645	66928 8678	66947 4716	66966 0759	66984 6807	67003 2860	67021 8917	67040 4980	67059 1048	67077 7120
404	67096 3198	67114 9280	67133 5368	67152 1460	67170 7557	67189 3660	67207 9767	67226 5879	67245 1996	67263 8118
405	67282 4245	67301 0377	67319 6514	67338 2656	67356 8802	67375 4954	67394 1110	67412 7272	67431 3438	67449 9610
406	67468 5786	67487 1967	67505 8153	67524 4345	67543 0541	67561 6741	67580 2947	67598 9158	67617 5374	67636 1594
407	67654 7820	67673 4050	67692 0286	67710 6526	67729 2771	67747 9021	67766 5276	67785 1536	67803 7801	67822 4070
408	67841 0345	67859 6625	67878 2909	67896 9198	67915 5492	67934 1791	67952 8095	67971 4404	67990 0718	68008 7037
409	68027 3360	68045 9689	68064 6022	68083 2360	68101 8703	68120 5051	68139 1404	68157 7762	68176 4125	68195 0492
410	68213 6865	68232 3242	68250 9624	68269 6011	68288 2403	68306 8800	68325 5202	68344 1608	68362 8019	68381 4436
411	68400 0857	68418 7283	68437 3714	68456 0149	68474 6590	68493 3036	68511 9486	68530 5941	68549 2401	68567 8866
412	68586 5336	68605 1810	68623 8290	68642 4774	68661 1263	68679 7757	68698 4256	68717 0760	68735 7268	68754 3782
413	68773 0300	68791 6823	68810 3351	68828 9884	68847 6421	68866 2964	68884 9511	68903 6063	68922 2620	68940 9182
414	68959 5748	68978 2320	68996 8896	69015 5477	69034 2063	69052 8654	69071 5249	69090 1850	69108 8455	69127 5065
415	69146 1680	69164 8300	69183 4924	69202 1553	69220 8188	69239 4826	69258 1470	69276 8119	69295 4772	69314 1430
416	69332 8093	69351 4761	69370 1434	69388 8111	69407 4793	69426 1480	69444 8172	69463 4869	69482 1570	69500 8277
417	69519 4988	69538 1703	69556 8424	69575 5150	69594 1880	69612 8615	69631 5355	69650 2099	69668 8848	69687 5603
418	69706 2362	69724 9125	69743 5894	69762 2667	69780 9445	69799 6228	69818 3016	69836 9808	69855 6605	69874 3407
419	69893 0214	69911 7025	69930 3842	69949 0663	69967 7489	69986 4319	70005 1154	70023 7995	70042 4839	70061 1689
420	70079 8544	70098 5403	70117 2267	70135 9135	70154 6009	70173 2887	70191 9770	70210 6658	70229 3550	70248 0447
421	70266 7349	70285 4256	70304 1168	70322 8084	70341 5005	70360 1931	70378 8861	70397 5796	70416 2736	70434 9681
422	70453 6630	70472 3585	70491 0543	70509 7507	70528 4475	70547 1449	70565 8426	70584 5409	70603 2396	70621 9388
423	70640 6385	70659 3387	70678 0393	70696 7404	70715 4420	70734 1440	70752 8465	70771 5495	70790 2530	70808 9569
424	70827 6613	70846 3662	70865 0715	70883 7773	70902 4836	70921 1904	70939 8976	70958 6053	70977 3135	70996 0221
425	71014 7312	71033 4408	71052 1509	71070 8614	71089 5724	71108 2838	71126 9958	71145 7082	71164 4211	71183 1344
426	71201 8482	71220 5625	71239 2773	71257 9925	71276 7082	71295 4243	71314 1410	71332 8581	71351 5755	71370 2937
427	71389 0122	71407 7311	71426 4506	71445 1705	71463 8909	71482 6117	71501 3330	71520 0543	71538 7771	71557 4998
428	71576 2230	71594 9466	71613 6707	71632 3953	71651 1204	71669 8459	71688 5719	71707 2983	71726 0252	71744 7526
429	71763 4805	71782 2088	71800 9376	71819 6668	71838 3965	71857 1267	71875 8574	71894 5885	71913 3200	71932 0521
430	71950 7846	71969 5176	71988 2510	72006 9849	72025 7193	72044 4541	72063 1894	72081 9252	72100 6614	72119 3981
431	72138 1352	72156 8729	72175 6109	72194 3495	72213 0885	72231 8280	72250 5679	72269 3083	72288 0492	72306 7905
432	72325 5323	72344 2745	72363 0173	72381 7604	72400 5041	72419 2482	72437 9927	72456 7378	72475 4833	72494 2292
433	72512 9756	72531 7225	72550 4698	72569 2176	72587 9659	72606 7146	72625 4638	72644 2135	72662 9636	72681 7141
434	72700 4652	72719 2167	72737 9686	72756 7210	72775 4739	72794 2272	72812 9810	72831 7353	72850 4900	72869 2451
435	72888 0008	72906 7569	72925 5134	72944 2704	72963 0279	72981 7858	73000 5442	73019 3031	73038 0624	73056 8221
436	73075 5824	73094 3431	73113 1042	73131 8658	73150 6279	73169 3904	73188 1534	73206 9168	73225 6807	73244 4450
437	73263 2098	73281 9751	73300 7408	73319 5070	73338 2736	73357 0407	73375 8083	73394 5763	73413 3448	73432 1137
438	73450 8831	73469 6529	73488 4232	73507 1939	73525 9652	73544 7368	73563 5089	73582 2815	73601 0545	73619 8280
439	73638 6020	73657 3764	73676 1512	73694 9265	73713 7023	73732 4785	73751 2552	73770 0323	73788 8099	73807 5879
440	73826 3664	73845 1454	73863 9248	73882 7046	73901 4849	73920 2657	73939 0469	73957 8286	73976 6107	73995 3933
441	74014 1763	74032 9598	74051 7437	74070 5281	74089 3130	74108 0983	74126 8840	74145 6702	74164 4569	74183 2440
442	74202 0316	74220 8196	74239 6081	74258 3970	74277 1864	74295 9762	74314 7665	74333 5572	74352 3484	74371 1400
443	74389 9321	74408 7246	74427 5176	74446 3110	74465 1049	74483 8993	74502 6941	74521 4893	74540 2850	74559 0811
444	74577 8777	74596 6748	74615 4723	74634 2702	74653 0686	74671 8675	74690 6668	74709 4665	74728 2667	74747 0673
445	74765 8684	74784 6700	74803 4720	74822 2744	74841 0773	74859 8806	74878 6844	74897 4887	74916 2934	74935 0985
446	74953 9041	74972 7101	74991 5166	75010 3235	75029 1309	75047 9387	75066 7470	75085 5557	75104 3649	75123 1745
447	75141 9846	75160 7951	75179 6060	75198 4174	75217 2293	75236 0416	75254 8543	75273 6675	75292 4812	75311 2953
448	75330 1098	75348 9248	75367 7402	75386 5561	75405 3724	75424 1892	75443 0064	75461 8240	75480 6421	75499 4607
449	75518 2797	75537 0991	75555 9190	75574 7393	75593 5601	75612 3813	75631 2030	75650 0251	75668 8476	75687 6706

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
450	75706 4941	75725 3180	75744 1423	75762 9671	75781 7923	75800 6180	75819 4441	75838 2706	75857 0976	75875 9251
451	75894 7529	75913 5813	75932 4100	75951 2393	75970 0689	75988 8990	76007 7295	76026 5605	76045 3920	76064 2238
452	76083 0561	76101 8889	76120 7221	76139 5557	76158 3898	76177 2243	76196 0593	76214 8947	76233 7306	76252 5669
453	76271 4036	76290 2408	76309 0784	76327 9164	76346 7549	76365 5939	76384 4333	76403 2731	76422 1134	76440 9541
454	76459 7952	76478 6368	76497 4788	76516 3213	76535 1642	76554 0075	76572 8513	76591 6955	76610 5402	76629 3853
455	76648 2309	76667 0768	76685 9233	76704 7701	76723 6174	76742 4652	76761 3134	76780 1620	76799 0110	76817 8605
456	76836 7105	76855 5608	76874 4117	76893 2629	76912 1146	76930 9667	76949 8193	76968 6723	76987 5257	77006 3796
457	77025 2339	77044 0887	77062 9439	77081 7995	77100 6556	77119 5121	77138 3690	77157 2264	77176 0842	77194 9425
458	77213 8012	77232 6603	77251 5199	77270 3799	77289 2403	77308 1012	77326 9625	77345 8242	77364 6864	77383 5490
459	77402 4121	77421 2756	77440 1395	77459 0039	77477 8686	77496 7339	77515 5995	77534 4656	77553 3322	77572 1992
460	77591 0666	77609 9344	77628 8027	77647 6714	77666 5405	77685 4101	77704 2801	77723 1506	77742 0214	77760 8928
461	77779 7645	77798 6367	77817 5093	77836 3824	77855 2558	77874 1298	77893 0041	77911 8789	77930 7541	77949 6298
462	77968 5059	77987 3824	78006 2593	78025 1367	78044 0145	78062 8928	78081 7714	78100 6506	78119 5301	78138 4101
463	78157 2905	78176 1713	78195 0526	78213 9343	78232 8164	78251 6990	78270 5820	78289 4654	78308 3493	78327 2336
464	78346 1183	78365 0035	78383 8890	78402 7751	78421 6615	78440 5484	78459 4357	78478 3234	78497 2116	78516 1002
465	78534 9892	78553 8787	78572 7686	78591 6589	78610 5497	78629 4408	78648 3324	78667 2245	78686 1170	78705 0098
466	78723 9032	78742 7969	78761 6911	78780 5857	78799 4808	78818 3762	78837 2721	78856 1685	78875 0652	78893 9624
467	78912 8600	78931 7581	78950 6565	78969 5554	78988 4548	79007 3545	79026 2547	79045 1553	79064 0564	79082 9578
468	79101 8597	79120 7620	79139 6648	79158 5680	79177 4716	79196 3756	79215 2800	79234 1849	79253 0902	79271 9960
469	79290 9021	79309 8087	79328 7157	79347 6232	79366 5311	79385 4393	79404 3481	79423 2572	79442 1668	79461 0768
470	79479 9872	79498 8981	79517 8093	79536 7210	79555 6331	79574 5457	79593 4587	79612 3721	79631 2859	79650 2001
471	79669 1148	79688 0299	79706 9454	79725 8614	79744 7778	79763 6946	79782 6118	79801 5294	79820 4475	79839 3660
472	79858 2849	79877 2042	79896 1240	79915 0442	79933 9648	79952 8858	79971 8073	79990 7292	80009 6515	80028 5742
473	80047 4974	80066 4209	80085 3449	80104 2693	80123 1942	80142 1194	80161 0451	80179 9712	80198 8978	80217 8247
474	80236 7521	80255 6799	80274 6081	80293 5367	80312 4658	80331 3953	80350 3252	80369 2555	80388 1863	80407 1174
475	80426 0490	80444 9810	80463 9135	80482 8463	80501 7796	80520 7133	80539 6474	80558 5819	80577 5169	80596 4523
476	80615 3881	80634 3243	80653 2609	80672 1980	80691 1354	80710 0733	80729 0117	80747 9504	80766 8895	80785 8291
477	80804 7691	80823 7095	80842 6504	80861 5916	80880 5333	80899 4754	80918 4179	80937 3608	80956 3041	80975 2479
478	80994 1921	81013 1367	81032 0817	81051 0271	81069 9730	81088 9193	81107 8660	81126 8131	81145 7606	81164 7086
479	81183 6569	81202 6057	81221 5549	81240 5045	81259 4545	81278 4050	81297 3559	81316 3071	81335 2588	81354 2110
480	81373 1635	81392 1164	81411 0698	81430 0236	81448 9778	81467 9324	81486 8874	81505 8429	81524 7988	81543 7550
481	81562 7117	81581 6688	81600 6264	81619 5843	81638 5427	81657 5015	81676 4606	81695 4202	81714 3803	81733 3407
482	81752 3016	81771 2628	81790 2245	81809 1866	81828 1491	81847 1120	81866 0754	81885 0391	81904 0033	81922 9679
483	81941 9329	81960 8983	81979 8641	81998 8303	82017 7970	82036 7641	82055 7315	82074 6994	82093 6677	82112 6365
484	82131 6056	82150 5751	82169 5451	82188 5155	82207 4863	82226 4575	82245 4291	82264 4011	82283 3735	82302 3464
485	82321 3196	82340 2933	82359 2674	82378 2419	82397 2168	82416 1921	82435 1679	82454 1440	82473 1206	82492 0975
486	82511 0749	82530 0527	82549 0309	82568 0095	82586 9886	82605 9680	82624 9479	82643 9281	82662 9088	82681 8899
487	82700 8714	82719 8533	82738 8356	82757 8183	82776 8014	82795 7850	82814 7689	82833 7533	82852 7381	82871 7233
488	82890 7089	82909 6949	82928 6813	82947 6681	82966 6554	82985 6430	83004 6310	83023 6195	83042 6084	83061 5977
489	83080 5874	83099 5775	83118 5680	83137 5589	83156 5502	83175 5419	83194 5341	83213 5266	83232 5196	83251 5130
490	83270 5067	83289 5009	83308 4955	83327 4905	83346 4859	83365 4817	83384 4780	83403 4746	83422 4716	83441 4691
491	83460 4669	83479 4652	83498 4639	83517 4630	83536 4624	83555 4623	83574 4626	83593 4633	83612 4644	83631 4660
492	83650 4679	83669 4702	83688 4730	83707 4761	83726 4796	83745 4836	83764 4880	83783 4927	83802 4979	83821 5035
493	83840 5095	83859 5159	83878 5227	83897 5299	83916 5375	83935 5455	83954 5539	83973 5627	83992 5720	84011 5816
494	84030 5916	84049 6021	84068 6129	84087 6242	84106 6358	84125 6479	84144 6604	84163 6732	84182 6865	84201 7002
495	84220 7143	84239 7288	84258 7436	84277 7588	84296 7746	84315 7907	84334 8073	84353 8242	84372 8415	84391 8592
496	84410 8773	84429 8958	84448 9148	84467 9341	84486 9538	84505 9740	84524 9945	84544 0154	84563 0366	84582 0585
497	84601 0807	84620 1032	84639 1262	84658 1495	84677 1733	84696 1975	84715 2220	84734 2470	84753 2724	84772 2981
498	84791 3243	84810 3509	84829 3778	84848 4052	84867 4330	84886 4612	84905 4897	84924 5187	84943 5481	84962 5779
499	84981 6081	85000 6386	85019 6696	85038 7010	85057 7328	85076 7650	85095 7976	85114 8306	85133 8639	85152 8977

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
500	85171.9319	85190.9665	85210.0015	85229.0369	85248.0727	85267.1088	85286.1454	85305.1824	85324.2198	85343.2576
501	85362.2958	85381.3343	85400.3733	85419.4127	85438.4525	85457.4927	85476.5332	85495.5742	85514.6156	85533.6574
502	85552.6995	85571.7421	85590.7851	85609.8284	85628.8722	85647.9164	85666.9609	85686.0059	85705.0512	85724.0970
503	85743.1431	85762.1897	85781.2366	85800.2840	85819.3317	85838.3799	85857.4284	85876.4773	85895.5267	85914.5764
504	85933.6265	85952.6770	85971.7280	85990.7793	86009.8310	86028.8831	86047.9356	86066.9885	86086.0418	86105.0955
505	86124.1496	86143.2041	86162.2589	86181.3142	86200.3699	86219.4260	86238.4824	86257.5393	86276.5965	86295.6542
506	86314.7122	86333.7707	86352.8295	86371.8887	86390.9484	86410.0084	86429.0688	86448.1296	86467.1908	86486.2524
507	86505.3144	86524.3768	86543.4396	86562.5028	86581.5663	86600.6303	86619.6947	86638.7594	86657.8246	86676.8901
508	86695.9561	86715.0224	86734.0891	86753.1562	86772.2237	86791.2916	86810.3599	86829.4286	86848.4977	86867.5672
509	86886.6371	86905.7073	86924.7780	86943.8490	86962.9205	86981.9923	87001.0645	87020.1371	87039.2102	87058.2836
510	87077.3574	87096.4315	87115.5061	87134.5811	87153.6565	87172.7322	87191.8084	87210.8849	87229.9618	87249.0391
511	87268.1169	87287.1950	87306.2735	87325.3524	87344.4316	87363.5113	87382.5914	87401.6718	87420.7527	87439.8339
512	87458.9155	87477.9975	87497.0799	87516.1627	87535.2459	87554.3295	87573.4135	87592.4978	87611.5826	87630.6677
513	87649.7532	87668.8391	87687.9254	87707.0121	87726.0992	87745.1867	87764.2746	87783.3628	87802.4515	87821.5405
514	87840.6299	87859.7197	87878.8099	87897.9005	87916.9915	87936.0829	87955.1746	87974.2668	87993.3593	88012.4522
515	88031.5455	88050.6392	88069.7333	88088.8278	88107.9227	88127.0179	88146.1135	88165.2096	88184.3060	88203.4028
516	88222.5000	88241.5976	88260.6955	88279.7939	88298.8926	88317.9917	88337.0913	88356.1912	88375.2914	88394.3921
517	88413.4932	88432.5946	88451.6965	88470.7987	88489.9013	88509.0043	88528.1077	88547.2114	88566.3156	88585.4201
518	88604.5251	88623.6304	88642.7361	88661.8422	88680.9486	88700.0555	88719.1627	88738.2704	88757.3784	88776.4868
519	88795.5956	88814.7047	88833.8143	88852.9242	88872.0346	88891.1453	88910.2564	88929.3679	88948.4797	88967.5920
520	89086.7046	89005.8176	89024.9310	89044.0448	89063.1590	89082.2736	89101.3885	89120.5038	89139.6195	89158.7356
521	89177.8521	89196.9690	89216.0862	89235.2038	89254.3219	89273.4403	89292.5590	89311.6782	89330.7977	89349.9177
522	89369.0380	89388.1587	89407.2798	89426.4012	89445.5231	89464.6453	89483.7679	89502.8909	89522.0143	89541.1380
523	89560.2622	89579.3867	89598.5116	89617.6369	89636.7626	89655.8886	89675.0151	89694.1419	89713.2691	89732.3967
524	89751.5246	89770.6530	89789.7817	89808.9108	89828.0403	89847.1702	89866.3004	89885.4310	89904.5621	89923.6935
525	89942.8252	89961.9574	89981.0899	90000.2228	90019.3561	90038.4898	90057.6239	90076.7583	90095.8932	90115.0284
526	90134.1639	90153.2999	90172.4362	90191.5730	90210.7101	90229.8476	90248.9854	90268.1237	90287.2623	90306.4013
527	90325.5407	90344.6804	90363.8206	90382.9611	90402.1020	90421.2433	90440.3849	90459.5270	90478.6694	90497.8122
528	90516.9553	90536.0989	90555.2428	90574.3871	90593.5318	90612.6769	90631.8223	90650.9682	90670.1144	90689.2609
529	90708.4079	90727.5552	90746.7029	90765.8510	90784.9995	90804.1484	90823.2976	90842.4472	90861.5972	90880.7475
530	90899.8983	90919.0494	90938.2009	90957.3527	90976.5050	90995.6576	91014.8106	91033.9640	91053.1177	91072.2718
531	91091.4264	91110.5812	91129.7365	91148.8921	91168.0481	91187.2045	91206.3613	91225.5184	91244.6760	91263.8338
532	91282.9921	91302.1508	91321.3098	91340.4692	91359.6290	91378.7891	91397.9496	91417.1105	91436.2718	91455.4334
533	91474.5955	91493.7579	91512.9206	91532.0838	91551.2473	91570.4112	91589.5755	91608.7402	91627.9052	91647.0706
534	91666.2364	91685.4025	91704.5690	91723.7359	91742.9032	91762.0708	91781.2389	91800.4073	91819.5760	91838.7452
535	91857.9147	91877.0846	91896.2548	91915.4255	91934.5965	91953.7679	91972.9396	91992.1118	92011.2843	92030.4572
536	92049.6304	92068.8040	92087.9780	92107.1524	92126.3271	92145.5023	92164.6777	92183.8536	92203.0298	92222.2065
537	92241.3834	92260.5608	92279.7385	92298.9166	92318.0951	92337.2739	92356.4531	92375.6327	92394.8127	92413.9930
538	92433.1737	92452.3548	92471.5362	92490.7180	92509.9002	92529.0828	92548.2657	92567.4490	92586.6327	92605.8167
539	92625.0012	92644.1859	92663.3711	92682.5566	92701.7425	92720.9288	92740.1154	92759.3025	92778.4898	92797.6776
540	92816.8657	92836.0542	92855.2431	92874.4323	92893.6219	92912.8119	92932.0022	92951.1929	92970.3840	92989.5755
541	93008.7673	93027.9595	93047.1521	93066.3450	93085.5383	93104.7320	93123.9260	93143.1204	93162.3152	93181.5103
542	93200.7059	93219.9018	93239.0980	93258.2946	93277.4916	93296.6890	93315.8867	93335.0848	93354.2833	93373.4821
543	93392.6813	93411.8809	93431.0808	93450.2811	93469.4818	93488.6829	93507.8843	93527.0861	93546.2882	93565.4907
544	93584.6936	93603.8969	93623.1005	93642.3045	93661.5088	93680.7136	93699.9186	93719.1241	93738.3299	93757.5361
545	93776.7427	93795.9496	93815.1569	93834.3646	93853.5726	93872.7810	93891.9897	93911.1989	93930.4083	93949.6182
546	93968.8284	93988.0390	94007.2500	94026.4613	94045.6730	94064.8850	94084.0975	94103.3103	94122.5234	94141.7369
547	94160.9508	94180.1651	94199.3797	94218.5947	94237.8100	94257.0257	94276.2418	94295.4582	94314.6751	94333.8922
548	94353.1098	94372.3277	94391.5459	94410.7646	94429.9836	94449.2029	94468.4227	94487.6427	94506.8632	94526.0840
549	94545.3052	94564.5268	94583.7487	94602.9709	94622.1936	94641.4166	94660.6400	94679.8637	94699.0878	94718.3123

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
550	94737.5371	94756.7623	94775.9878	94795.2137	94814.4400	94833.6667	94852.8937	94872.1210	94891.3488	94910.5769
551	94929.8053	94949.0341	94968.2633	94987.4929	95006.7228	95025.9531	95045.1837	95064.4147	95083.6460	95102.8778
552	95122.1099	95141.3423	95160.5751	95179.8083	95199.0418	95218.2757	95237.5100	95256.7446	95275.9796	95295.2149
553	95314.4506	95333.6867	95352.9231	95372.1599	95391.3971	95410.6346	95429.8725	95449.1107	95468.3493	95487.5882
554	95506.8276	95526.0672	95545.3073	95564.5477	95583.7884	95603.0296	95622.2711	95641.5129	95660.7551	95679.9977
555	95699.2406	95718.4839	95737.7275	95756.9715	95776.2159	95795.4606	95814.7057	95833.9512	95853.1970	95872.4431
556	95891.6897	95910.9366	95930.1838	95949.4314	95968.6794	95987.9277	96007.1764	96026.4254	96045.6748	96064.9246
557	96084.1747	96103.4252	96122.6760	96141.9272	96161.1788	96180.4307	96199.6830	96218.9356	96238.1886	96257.4419
558	96276.6957	96295.9497	96315.2042	96334.4589	96353.7141	96372.9696	96392.2254	96411.4817	96430.7382	96449.9952
559	96469.2524	96488.5101	96507.7681	96527.0265	96546.2852	96565.5443	96584.8037	96604.0635	96623.3236	96642.5842
560	96661.8450	96681.1062	96700.3678	96719.6298	96738.8921	96758.1547	96777.4177	96796.6811	96815.9448	96835.2089
561	96854.4733	96873.7381	96893.0032	96912.2687	96931.5346	96950.8008	96970.0674	96989.3343	97008.6016	97027.8692
562	97047.1372	97066.4056	97085.6743	97104.9434	97124.2128	97143.4826	97162.7527	97182.0232	97201.2940	97220.5652
563	97239.8368	97259.1087	97278.3809	97297.6535	97316.9265	97336.1998	97355.4735	97374.7476	97394.0220	97413.2967
564	97432.5718	97451.8473	97471.1231	97490.3992	97509.6758	97528.9526	97548.2299	97567.5074	97586.7854	97606.0637
565	97625.3423	97644.6213	97663.9007	97683.1804	97702.4604	97721.7408	97741.0216	97760.3027	97779.5842	97798.8660
566	97818.1482	97837.4308	97856.7136	97875.9969	97895.2805	97914.5644	97933.8487	97953.1334	97972.4184	97991.7037
567	98010.9895	98030.2755	98049.5619	98068.8487	98088.1358	98107.4233	98126.7111	98145.9993	98165.2879	98184.5767
568	98203.8660	98223.1556	98242.4455	98261.7358	98281.0264	98300.3174	98319.6088	98338.9005	98358.1925	98377.4849
569	98396.7777	98416.0708	98435.3643	98454.6581	98473.9522	98493.2467	98512.5416	98531.8368	98551.1324	98570.4283
570	98589.7246	98609.0212	98628.3182	98647.6155	98666.9132	98686.2112	98705.5095	98724.8083	98744.1073	98763.4068
571	98782.7065	98802.0067	98821.3071	98840.6080	98859.9091	98879.2107	98898.5125	98917.8148	98937.1173	98956.4203
572	98975.7235	98995.0271	99014.3311	99033.6354	99052.9401	99072.2451	99091.5505	99110.8562	99130.1623	99149.4687
573	99168.7755	99188.0826	99207.3901	99226.6979	99246.0060	99265.3145	99284.6234	99303.9326	99323.2422	99342.5521
574	99361.8623	99381.1729	99400.4839	99419.7952	99439.1068	99458.4188	99477.7312	99497.0439	99516.3569	99535.6703
575	99554.9840	99574.2981	99593.6126	99612.9273	99632.2425	99651.5579	99670.8738	99690.1899	99709.5064	99728.8233
576	99748.1405	99767.4581	99786.7760	99806.0942	99825.4128	99844.7318	99864.0511	99883.3707	99902.6907	99922.0110
577	99941.3317	99960.6528	99979.9741	99999.2959	100018.6179	100037.9403	100057.2631	100076.5862	100095.9097	100115.2335
578	100134.5576	100153.8821	100173.2069	100192.5321	100211.8576	100231.1835	100250.5097	100269.8363	100289.1632	100308.4905
579	100327.8181	100347.1460	100366.4743	100385.8029	100405.1319	100424.4613	100443.7909	100463.1210	100482.4513	100501.7820
580	100521.1131	100540.4445	100559.7762	100579.1083	100598.4407	100617.7735	100637.1066	100656.4401	100675.7739	100695.1081
581	100714.4426	100733.7774	100753.1126	100772.4481	100791.7840	100811.1202	100830.4568	100849.7937	100869.1310	100888.4686
582	100907.8065	100927.1448	100946.4834	100965.8224	100985.1617	101004.5013	101023.8413	101043.1817	101062.5224	101081.8634
583	101101.2048	101120.5465	101139.8886	101159.2310	101178.5737	101197.9168	101217.2602	101236.6040	101255.9481	101275.2926
584	101294.6374	101313.9825	101333.3280	101352.6738	101372.0200	101391.3665	101410.7134	101430.0606	101449.4081	101468.7560
585	101488.1042	101507.4528	101526.8017	101546.1509	101565.5005	101584.8504	101604.2007	101623.5513	101642.9023	101662.2536
586	101681.6052	101700.9572	101720.3095	101739.6622	101759.0152	101778.3685	101797.7222	101817.0763	101836.4306	101855.7853
587	101875.1404	101894.4958	101913.8515	101933.2076	101952.5640	101971.9207	101991.2778	102010.6353	102029.9930	102049.3511
588	102068.7096	102088.0684	102107.4275	102126.7870	102146.1468	102165.5070	102184.8675	102204.2283	102223.5895	102242.9510
589	102262.3128	102281.6750	102301.0376	102320.4004	102339.7636	102359.1272	102378.4911	102397.8553	102417.2199	102436.5848
590	102455.9500	102475.3156	102494.6815	102514.0478	102533.4144	102552.7813	102572.1486	102591.5162	102610.8842	102630.2525
591	102649.6211	102668.9901	102688.3594	102707.7291	102727.0990	102746.4694	102765.8400	102785.2110	102804.5824	102823.9540
592	102843.3261	102862.6984	102882.0711	102901.4441	102920.8175	102940.1912	102959.5652	102978.9396	102998.3143	103017.6894
593	103037.0648	103056.4405	103075.8166	103095.1930	103114.5697	103133.9468	103153.3242	103172.7019	103192.0800	103211.4585
594	103230.8372	103250.2163	103269.5957	103288.9755	103308.3556	103327.7361	103347.1169	103366.4980	103385.8794	103405.2612
595	103424.6433	103444.0258	103463.4086	103482.7917	103502.1752	103521.5590	103540.9431	103560.3275	103579.7124	103599.0976
596	103618.4831	103637.8689	103657.2550	103676.6415	103696.0283	103715.4155	103734.8030	103754.1908	103773.5790	103792.9675
597	103812.3563	103831.7455	103851.1350	103870.5249	103889.9150	103909.3056	103928.6964	103948.0876	103967.4791	103986.8709
598	104006.2631	104025.6556	104045.0485	104064.4417	104083.8352	104103.2291	104122.6233	104142.0178	104161.4126	104180.8078
599	104200.2034	104219.5992	104238.9954	104258.3919	104277.7888	104297.1860	104316.5835	104335.9814	104355.3796	104374.7781

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
600	104394.1770	104413.5762	104432.9757	104452.3756	104471.7758	104491.1763	104510.5772	104529.9783	104549.3799	104568.7817
601	104588.1839	104607.5865	104626.9893	104646.3925	104665.7960	104685.1999	104704.6041	104724.0086	104743.4135	104762.8186
602	104782.2242	104801.6300	104821.0362	104840.4427	104859.8496	104879.2567	104898.6642	104918.0721	104937.4803	104956.8888
603	104976.2976	104995.7068	105015.1163	105034.5261	105053.9363	105073.3468	105092.7576	105112.1688	105131.5803	105150.9921
604	105170.4042	105189.8167	105209.2295	105228.6427	105248.0562	105267.4700	105286.8841	105306.2986	105325.7134	105345.1285
605	105364.5440	105383.9598	105403.3759	105422.7923	105442.2091	105461.6262	105481.0437	105500.4615	105519.8796	105539.2980
606	105558.7167	105578.1359	105597.5553	105616.9750	105636.3951	105655.8155	105675.2363	105694.6574	105714.0788	105733.5005
607	105752.9226	105772.3449	105791.7677	105811.1907	105830.6141	105850.0378	105869.4618	105888.8862	105908.3109	105927.7359
608	105947.1613	105966.5870	105985.0130	106005.4393	106024.8660	106044.2930	106063.7203	106083.1480	106102.5760	106122.0043
609	106141.4329	106160.8619	106180.2912	106199.7208	106219.1508	106238.5811	106258.0117	106277.4426	106296.8739	106316.3055
610	106335.7374	106355.1697	106374.6022	106394.0352	106413.4684	106432.9019	106452.3358	106471.7701	106491.2046	106510.6395
611	106530.0747	106549.5102	106568.9461	106588.3822	106607.8188	106627.2556	106646.6928	106666.1302	106685.5681	106705.0062
612	106724.4447	106743.8835	106763.3226	106782.7621	106802.2018	106821.6419	106841.0824	106860.5231	106879.9642	106899.4056
613	106918.8474	106938.2894	106957.7318	106977.1745	106996.6176	107016.0609	107035.5046	107054.9486	107074.3930	107093.8377
614	107113.2827	107132.7280	107152.1736	107171.6196	107191.0659	107210.5125	107229.9595	107249.4068	107268.8544	107288.3023
615	107307.7505	107327.1991	107346.6480	107366.0972	107385.5468	107404.9967	107424.4469	107443.8974	107463.3482	107482.7994
616	107502.2509	107521.7028	107541.1549	107560.6074	107580.0602	107599.5133	107618.9668	107638.4205	107657.8746	107677.3291
617	107696.7838	107716.2389	107735.6943	107755.1500	107774.6060	107794.0624	107813.5191	107832.9761	107852.4334	107871.8911
618	107891.3491	107910.8074	107930.2660	107949.7250	107969.1843	107988.6439	108008.1038	108027.5640	108047.0246	108066.4855
619	108085.9467	108105.4083	108124.8701	108144.3323	108163.7948	108183.2577	108202.7208	108222.1843	108241.6481	108261.1122
620	108280.5767	108300.0415	108319.5065	108338.9720	108358.4377	108377.9038	108397.3701	108416.8368	108436.3039	108455.7712
621	108475.2389	108494.7069	108514.1752	108533.6438	108553.1128	108572.5821	108592.0517	108611.5216	108630.9919	108650.4624
622	108669.9333	108689.4045	108708.8761	108728.3479	108747.8201	108767.2926	108786.7654	108806.2385	108825.7120	108845.1858
623	108864.6599	108884.1343	108903.6091	108923.0841	108942.5595	108962.0352	108981.5112	109000.9876	109020.4643	109039.9412
624	109059.4186	109078.8962	109098.3741	109117.8524	109137.3310	109156.8099	109176.2892	109195.7687	109215.2486	109234.7288
625	109254.2093	109273.6901	109293.1713	109312.6527	109332.1345	109351.6167	109371.0991	109390.5818	109410.0649	109429.5483
626	109449.0320	109468.5160	109488.0004	109507.4851	109526.9700	109546.4554	109565.9410	109585.4269	109604.9132	109624.3998
627	109643.8867	109663.3739	109682.8615	109702.3493	109721.8375	109741.3260	109760.8148	109780.3039	109799.7934	109819.2832
628	109838.7733	109858.2637	109877.7544	109897.2454	109916.7368	109936.2285	109955.7205	109975.2128	109994.7054	110014.1984
629	110033.6917	110053.1853	110072.6792	110092.1734	110111.6680	110131.1628	110150.6580	110170.1535	110189.6493	110209.1454
630	110228.6419	110248.1387	110267.6358	110287.1332	110306.6309	110326.1289	110345.6273	110365.1259	110384.6249	110404.1242
631	110423.6239	110443.1238	110462.6241	110482.1246	110501.6255	110521.1267	110540.6283	110560.1301	110579.6323	110599.1347
632	110618.6375	110638.1406	110657.6440	110677.1478	110696.6518	110716.1562	110735.6609	110755.1659	110774.6712	110794.1769
633	110813.6828	110833.1891	110852.6957	110872.2026	110891.7098	110911.2173	110930.7252	110950.2333	110969.7418	110989.2506
634	111008.7597	111028.2691	111047.7789	111067.2889	111086.7993	111106.3100	111125.8210	111145.3323	111164.8440	111184.3559
635	111203.8682	111223.3807	111242.8936	111262.4068	111281.9204	111301.4342	111320.9484	111340.4628	111359.9776	111379.4927
636	111398.0081	111418.5238	111438.0399	111457.5562	111477.0729	111496.5899	111516.1072	111535.6248	111555.1427	111574.6609
637	111594.1795	111613.6984	111633.2175	111652.7370	111672.2568	111691.7770	111711.2974	111730.8182	111750.3392	111769.8606
638	111789.3823	111808.9043	111828.4266	111847.9492	111867.4722	111886.9954	111906.5190	111926.0429	111945.5671	111965.0916
639	111984.6164	112004.1416	112023.6670	112043.1928	112062.7188	112082.2452	112101.7719	112121.2989	112140.8263	112160.3539
640	112179.8818	112199.4101	112218.9387	112238.4676	112257.9968	112277.5263	112297.0561	112316.5862	112336.1167	112355.6475
641	112375.1765	112394.7099	112414.2416	112433.7736	112453.3059	112472.8386	112492.3715	112511.9048	112531.4383	112550.9722
642	112570.5064	112590.0409	112609.5757	112629.1109	112648.6463	112668.1820	112687.7181	112707.2545	112726.7912	112746.3281
643	112765.8654	112785.4031	112804.9410	112824.4792	112844.0178	112863.5566	112883.0958	112902.6353	112922.1751	112941.7152
644	112961.2556	112980.7963	113000.3373	113019.8787	113039.4203	113058.9623	113078.5046	113098.0472	113117.5901	113137.1333
645	113156.6768	113176.2206	113195.7647	113215.3092	113234.8539	113254.3990	113273.9444	113293.4901	113313.0361	113332.5824
646	113352.1290	113371.6759	113391.2231	113410.7707	113430.3185	113449.8667	113469.4152	113488.9640	113508.5130	113528.0624
647	113547.6122	113567.1622	113586.7125	113606.2631	113625.8141	113645.3653	113664.9169	113684.4688	113704.0209	113723.5734
648	113743.1262	113762.6793	113782.2328	113801.7865	113821.3405	113840.8948	113860.4495	113880.0044	113899.5597	113919.1153
649	113938.6712	113958.2274	113977.7839	113997.3407	114016.8978	114036.4552	114056.0129	114075.5710	114095.1293	114114.6880

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
550	114134 2469	114153 9062	114173 3658	114192 9257	114212 4858	114232 0463	114251 6072	114271 1683	114290 7297	114310 2914
551	114529 8535	114549 4159	114569 0784	114588 7414	114608 4047	114627 0682	114647 2321	114666 7963	114686 3608	114705 9256
552	114725 4907	114745 0561	114764 6218	114784 1879	114803 7542	114823 3208	114842 8878	114862 4550	114882 0226	114901 5905
553	114921 1588	114940 7271	114960 2959	114979 8650	114999 4344	115019 0041	115038 5741	115058 1444	115077 7150	115097 2859
554	115116 8572	115136 4287	115156 0006	115175 5727	115195 1452	115214 7179	115234 2910	115253 8644	115273 4380	115293 0120
555	115312 5863	115332 1609	115351 7358	115371 3110	115390 8865	115410 4623	115430 0384	115449 6149	115469 1916	115488 7686
556	115508 3460	115527 9237	115547 5016	115567 0798	115586 6584	115606 2372	115625 8164	115645 3957	115664 9753	115684 5552
557	115704 1361	115723 7168	115743 2978	115762 8791	115782 4607	115802 0426	115821 6248	115841 2073	115860 7902	115880 3733
558	115899 9567	115919 5405	115939 1245	115958 7088	115978 2935	115997 8784	116017 4637	116037 0492	116056 6351	116076 2212
559	116095 8077	116115 3945	116134 9816	116154 5689	116174 1566	116193 7446	116213 3329	116232 9215	116252 5104	116272 0996
560	116291 6890	116311 2789	116330 8690	116350 4594	116370 0501	116389 6411	116409 2324	116428 8240	116448 4159	116468 0082
561	116487 5987	116507 1935	116526 7887	116546 3841	116565 9798	116585 5759	116605 1722	116624 7688	116644 3658	116663 9630
562	116683 5426	116703 1384	116722 7346	116742 3311	116761 9278	116781 5249	116801 1222	116820 7199	116840 3179	116859 9161
563	116879 5147	116899 1136	116918 7127	116938 3122	116957 9120	116977 5121	116997 1125	117016 7131	117036 3141	117055 9154
564	117075 5170	117095 1189	117114 7211	117134 3235	117153 9263	117173 5294	117193 1328	117212 7365	117232 3405	117251 9448
565	117271 5494	117291 1543	117310 7595	117330 3650	117349 9708	117369 5769	117389 1833	117408 7900	117428 3970	117448 0043
566	117467 6119	117487 2197	117506 8279	117526 4365	117546 0453	117565 6544	117585 2638	117604 8735	117624 4835	117644 0938
567	117663 7044	117683 3153	117702 9265	117722 5380	117742 1498	117761 7619	117781 3743	117800 9869	117820 5999	117840 2132
568	117859 8269	117879 4407	117899 0549	117918 6694	117938 2842	117957 8993	117977 5147	117997 1304	118016 7464	118036 3627
569	118055 9793	118075 5962	118095 2133	118114 8308	118134 4486	118154 0667	118173 6851	118193 3038	118212 9227	118232 5420
570	118252 1616	118071 7815	118091 4016	118111 0221	118130 6429	118150 2640	118169 8853	118189 5070	118209 1289	118228 7512
571	118248 3738	118267 9966	118287 6198	118307 2432	118326 8670	118346 4910	118366 1154	118385 7400	118405 3650	118424 9902
572	118444 6157	118464 2416	118483 8677	118503 4941	118523 1209	118542 7479	118562 3752	118581 9028	118601 6308	118621 2590
573	118640 8875	118660 5163	118680 1454	118699 7748	118719 4045	118739 0345	118758 6648	118778 2954	118797 9263	118817 5575
574	118837 1889	118856 8207	118876 4528	118896 0852	118915 7178	118935 3508	118954 9841	118974 6176	118994 2515	119013 8856
575	119033 5201	119053 1548	119072 7899	119092 4252	119112 0608	119131 6968	119151 3330	119170 9695	119190 6063	119210 2434
576	119229 8808	119249 5185	119269 1565	119288 7948	119308 4334	119328 0723	119347 7115	119367 3510	119386 9908	119406 6308
577	119426 2712	119445 9119	119465 5528	119485 1941	119504 8356	119524 4774	119544 1196	119563 7620	119583 4047	119603 0478
578	119622 6911	119642 3347	119661 9786	119681 6228	119701 2673	119720 9121	119740 5572	119760 2026	119779 8482	119799 4942
579	119819 1405	119838 7870	119858 4339	119878 0810	119897 7285	119917 3762	119937 0243	119956 6726	119976 3212	119995 9701
580	120015 6193	120035 2688	120054 9186	120074 5687	120094 2191	120113 8698	120133 5207	120153 1720	120172 8236	120192 4754
581	120212 1276	120231 7800	120251 4328	120271 0858	120290 7391	120310 3927	120330 0466	120349 7008	120369 3553	120389 0101
582	120408 6652	120428 3206	120447 9762	120467 6322	120487 2885	120506 9450	120526 6019	120546 2590	120565 9164	120585 5741
583	120605 2322	120624 8905	120644 5491	120664 2079	120683 8671	120703 5266	120723 1864	120742 8464	120762 5068	120782 1674
584	120801 8284	120821 4896	120841 1511	120860 8130	120880 4751	120900 1375	120919 8002	120939 4631	120959 1264	120978 7900
585	120998 4539	121018 1180	121037 7825	121057 4472	121077 1122	121096 7775	121116 4432	121136 1091	121155 7753	121175 4417
586	121195 1085	121214 7756	121234 4430	121254 1106	121273 7786	121293 4468	121313 1153	121332 7841	121352 4533	121372 1227
587	121391 7924	121411 4623	121431 1326	121450 8032	121470 4740	121490 1452	121509 8166	121529 4884	121549 1604	121568 8327
588	121588 5053	121608 1782	121627 8514	121647 5248	121667 1986	121686 8727	121706 5470	121726 2216	121745 8966	121765 5718
589	121785 2473	121804 9231	121824 5992	121844 2756	121863 9522	121883 6292	121903 3064	121922 9840	121942 6618	121962 3399
590	121982 0183	122001 6970	122021 3760	122041 0553	122060 7349	122080 4147	122100 0949	122119 7753	122139 4560	122159 1370
591	122178 8183	122198 4999	122218 1818	122237 8640	122257 5465	122277 2292	122296 9123	122316 5956	122336 2792	122355 9631
592	122375 6473	122395 3318	122415 0166	122434 7016	122454 3870	122474 0726	122493 7586	122513 4448	122533 1313	122552 8181
593	122572 5052	122592 1926	122611 8802	122631 5682	122651 2564	122670 9449	122690 6338	122710 3229	122730 0123	122749 7019
594	122769 3919	122789 0822	122808 7727	122828 4635	122848 1547	122867 8461	122887 5378	122907 2298	122926 9220	122946 6146
595	122966 3074	122986 0006	123005 6946	123025 3887	123045 0831	123064 7780	123084 4705	123104 1655	123123 8606	123143 5560
596	123163 2518	123182 9478	123202 6441	123222 3407	123242 0375	123261 7347	123281 4322	123301 1299	123320 8279	123340 5262
597	123360 2248	123379 9237	123399 6229	123419 3223	123439 0221	123458 7221	123478 4224	123498 1230	123517 8239	123537 5251
598	123557 2266	123576 9283	123596 6303	123616 3327	123636 0355	123655 7382	123675 4416	123695 1448	123714 8486	123734 5526
599	123754 2570	123773 9618	123793 6665	123813 3717	123833 0772	123852 7829	123872 4890	123892 1953	123911 9019	123931 6089

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
700	123951.3160	123971.0235	123990.7312	124010.4393	124030.1476	124049.8562	124069.5651	124089.2743	124108.9838	124128.6935
701	124148.4036	124168.1139	124187.8245	124207.5354	124227.2466	124246.9581	124266.6698	124286.3819	124306.0942	124325.8068
702	124345.5197	124365.2329	124384.9463	124404.6601	124424.3741	124444.0884	124463.8030	124483.5179	124503.2331	124522.9486
703	124542.6643	124562.3803	124582.0966	124601.8132	124621.5301	124641.2473	124660.9647	124680.6825	124700.4005	124720.1188
704	124739.8374	124759.5562	124779.2754	124798.9948	124818.7145	124838.4345	124858.1548	124877.8754	124897.5963	124917.3174
705	124937.0388	124956.7605	124976.4825	124996.2048	125015.9274	125035.6502	125055.3733	125075.0967	125094.8204	125114.5444
706	125134.2687	125153.9932	125173.7180	125193.4431	125213.1685	125232.8942	125252.6202	125272.3464	125292.0729	125311.7997
707	125331.5268	125351.2542	125370.9819	125390.7098	125410.4380	125430.1665	125449.8953	125469.6244	125489.3537	125509.0834
708	125528.8133	125548.5435	125568.2740	125588.0047	125607.7358	125627.4671	125647.1987	125666.9306	125686.6628	125706.3952
709	125726.1280	125745.8610	125765.5943	125785.3279	125805.0618	125824.7959	125844.5303	125864.2651	125884.0001	125903.7353
710	125923.4709	125943.2067	125962.9429	125982.6793	126002.4159	126022.1529	126041.8902	126061.6277	126081.3655	126101.1036
711	126120.8420	126140.5806	126160.3196	126180.0588	126199.7983	126219.5381	126239.2781	126259.0185	126278.7591	126298.5000
712	126318.2412	126337.9826	126357.7244	126377.4664	126397.2087	126416.9513	126436.6942	126456.4373	126476.1808	126495.9245
713	126515.6685	126535.4128	126555.1573	126574.9021	126594.6473	126614.3927	126634.1383	126653.8843	126673.6305	126693.3770
714	126713.1238	126732.8709	126752.6183	126772.3659	126792.1138	126811.8620	126831.6105	126851.3592	126871.1083	126890.8576
715	126910.6072	126930.3571	126950.1072	126969.8577	126989.6084	127009.3594	127029.1106	127048.8622	127068.6140	127088.3661
716	127108.1185	127127.8712	127147.6241	127167.3774	127187.1309	127206.8847	127226.6387	127246.3931	127266.1477	127285.9026
717	127305.6578	127325.4132	127345.1690	127364.9250	127384.6813	127404.4379	127424.1947	127443.9519	127463.7093	127483.4670
718	127503.2249	127522.9832	127542.7417	127562.5005	127582.2596	127602.0190	127621.7786	127641.5385	127661.2987	127681.0592
719	127700.8200	127720.5810	127740.3423	127760.1039	127779.8658	127799.6279	127819.3903	127839.1530	127858.9160	127878.6793
720	127898.4428	127918.2066	127937.9707	127957.7351	127977.4997	127997.2646	128017.0298	128036.7953	128056.5611	128076.3271
721	128096.0934	128115.8600	128135.6269	128155.3940	128175.1614	128194.9291	128214.6971	128234.4653	128254.2339	128274.0027
722	128293.7717	128313.5411	128333.3107	128353.0807	128372.8508	128392.6213	128412.3921	128432.1631	128451.9344	128471.7059
723	128491.4778	128511.2499	128531.0223	128550.7950	128570.5680	128590.3412	128610.1147	128629.8885	128649.6626	128669.4369
724	128689.2115	128708.9864	128728.7616	128748.5370	128768.3127	128788.0887	128807.8650	128827.6415	128847.4184	128867.1955
725	128886.9728	128906.7505	128926.5284	128946.3066	128966.0851	128985.8639	129005.6429	129025.4222	129045.2018	129064.9816
726	129084.7618	129104.5422	129124.3229	129144.1038	129163.8850	129183.6666	129203.4483	129223.2304	129243.0127	129262.7953
727	129282.5782	129302.3614	129322.1448	129341.9285	129361.7125	129381.4968	129401.2813	129421.0661	129440.8512	129460.6366
728	129480.4222	129500.2081	129519.9943	129539.7808	129559.5675	129579.3545	129599.1418	129618.9294	129638.7172	129658.5053
729	129678.2937	129698.0823	129717.8713	129737.6605	129757.4499	129777.2397	129797.0297	129816.8200	129836.6106	129856.4014
730	129876.1926	129895.9840	129915.7756	129935.5676	129955.3598	129975.1523	129994.9450	130014.7381	130034.5314	130054.3250
731	130074.1188	130093.9130	130113.7074	130133.5021	130153.2970	130173.0922	130192.8877	130212.6835	130232.4796	130252.2759
732	130272.0725	130291.8694	130311.6665	130331.4639	130351.2616	130371.0596	130390.8578	130410.6563	130430.4551	130450.2541
733	130470.0535	130489.8531	130509.6529	130529.4531	130549.2535	130569.0542	130588.8551	130608.6564	130628.4579	130648.2597
734	130668.0617	130687.8640	130707.6666	130727.4695	130747.2726	130767.0761	130786.8797	130806.6837	130826.4879	130846.2924
735	130866.0972	130885.9023	130905.7076	130925.5132	130945.3190	130965.1252	130984.9316	131004.7382	131024.5452	131044.3524
736	131064.1599	131083.9677	131103.7757	131123.5840	131143.3926	131163.2015	131183.0106	131202.8200	131222.6297	131242.4396
737	131262.2498	131282.0603	131301.8710	131321.6821	131341.4934	131361.3049	131381.1168	131400.9289	131420.7413	131440.5539
738	131460.3668	131480.1800	131499.9935	131519.8072	131539.6212	131559.4355	131579.2500	131599.0649	131618.8800	131638.6953
739	131658.5109	131678.3268	131698.1430	131717.9595	131737.7762	131757.5932	131777.4104	131797.2279	131817.0457	131836.8638
740	131856.6821	131876.5007	131896.3196	131916.1388	131935.9582	131955.7779	131975.5978	131995.4180	132015.2385	132035.0593
741	132054.8803	132074.7017	132094.5232	132114.3451	132134.1672	132153.9896	132173.8122	132193.6352	132213.4584	132233.2818
742	132253.1055	132272.9296	132292.7538	132312.5784	132332.4032	132352.2283	132372.0536	132391.8792	132411.7051	132431.5313
743	132451.3577	132471.1844	132491.0114	132510.8386	132530.6661	132550.4939	132570.3219	132590.1502	132609.9788	132629.8077
744	132649.6368	132669.4662	132689.2958	132709.1257	132728.9559	132748.7864	132768.6171	132788.4481	132808.2794	132828.1109
745	132847.9427	132867.7748	132887.6072	132907.4398	132927.2726	132947.1058	132966.9392	132986.7729	133006.6068	133026.4411
746	133046.2755	133066.1103	133085.9453	133105.7806	133125.6162	133145.4520	133165.2881	133185.1245	133204.9611	133224.7980
747	133244.6352	133264.4726	133284.3103	133304.1483	133323.9865	133343.8250	133363.6638	133383.5028	133403.3421	133423.1817
748	133443.0215	133462.8617	133482.7020	133502.5427	133522.3836	133542.2248	133562.0662	133581.9079	133601.7499	133621.5922
749	133641.4347	133661.2774	133681.1205	133700.9638	133720.8074	133740.6512	133760.4954	133780.3397	133800.1844	133820.0293

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
750	133839.8745	133859.7199	133879.5657	133899.4116	133919.2579	133939.1044	133958.9512	133978.7982	133998.6456	134018.4931
751	134038.3410	134058.1891	134078.0375	134097.8861	134117.7350	134137.5842	134157.4337	134177.2834	134197.1334	134216.9836
752	134236.8341	134256.6849	134276.5359	134296.3872	134316.2388	134336.0906	134355.9428	134375.7951	134395.6478	134415.5007
753	134435.3538	134455.2073	134475.0610	134494.9149	134514.7692	134534.6237	134554.4784	134574.3334	134594.1887	134614.0443
754	134633.9001	134653.7562	134673.6126	134693.4692	134713.3261	134733.1832	134753.0406	134772.8983	134792.7562	134812.6144
755	134832.4729	134852.3317	134872.1907	134892.0499	134911.9095	134931.7693	134951.6293	134971.4896	134991.3502	135011.2111
756	135031.0722	135050.9336	135070.7952	135090.6572	135110.5193	135130.3818	135150.2445	135170.1075	135189.9707	135209.8342
757	135229.6980	135249.5620	135269.4263	135289.2908	135309.1557	135329.0208	135348.8861	135368.7517	135388.6176	135408.4837
758	135428.3501	135448.2168	135468.0837	135487.9509	135507.8184	135527.6861	135547.5541	135567.4224	135587.2909	135607.1597
759	135627.0287	135646.8980	135666.7676	135686.6374	135706.5075	135726.3779	135746.2485	135766.1194	135785.9905	135805.8619
760	135825.7336	135845.6055	135865.4777	135885.3502	135905.2229	135925.0959	135944.9692	135964.8427	135984.7165	136004.5905
761	136024.4648	136044.3394	136064.2142	136084.0893	136103.9647	136123.8403	136143.7162	136163.5923	136183.4687	136203.3454
762	136223.2223	136243.0995	136262.9770	136282.8547	136302.7327	136322.6109	136342.4894	136362.3682	136382.2472	136402.1265
763	136422.0061	136441.8859	136461.7660	136481.6463	136501.5269	136521.4078	136541.2889	136561.1703	136581.0520	136600.9339
764	136620.8160	136640.6985	136660.5812	136680.4641	136700.3474	136720.2308	136740.1146	136759.9986	136779.8829	136799.7674
765	136819.6522	136839.5372	136859.4225	136879.3081	136899.1940	136919.0801	136938.9664	136958.8530	136978.7399	136998.6271
766	137018.5145	137038.4021	137058.2901	137078.1782	137098.0667	137117.9554	137137.8444	137157.7336	137177.6231	137197.5128
767	137217.4029	137237.2931	137257.1837	137277.0745	137296.9655	137316.8568	137336.7484	137356.6403	137376.5324	137396.4247
768	137416.3173	137436.2102	137456.1033	137475.9968	137495.8904	137515.7843	137535.6785	137555.5730	137575.4677	137595.3626
769	137615.2578	137635.1533	137655.0491	137674.9451	137694.8413	137714.7379	137734.6346	137754.5317	137774.4290	137794.3265
770	137814.2244	137834.1224	137854.0208	137873.9194	137893.8182	137913.7174	137933.6167	137953.5164	137973.4163	137993.3164
771	138013.2169	138033.1175	138053.0185	138072.9197	138092.8211	138112.7228	138132.6248	138152.5270	138172.4295	138192.3323
772	138212.2353	138232.1386	138252.0421	138271.9459	138291.8499	138311.7542	138331.6588	138351.5636	138371.4687	138391.3740
773	138411.2796	138431.1855	138451.0916	138470.9980	138490.9046	138510.8115	138530.7187	138550.6261	138570.5337	138590.4417
774	138610.3499	138630.2583	138650.1670	138670.0759	138689.9852	138709.8946	138729.8044	138749.7144	138769.6246	138789.5351
775	138809.4459	138829.3569	138849.2682	138869.1797	138889.0915	138909.0036	138928.9159	138948.8285	138968.7413	138988.6544
776	139008.5678	139028.4814	139048.3952	139068.3093	139088.2237	139108.1384	139128.0532	139147.9684	139167.8838	139187.7995
777	139207.7154	139227.6316	139247.5480	139267.4647	139287.3817	139307.2989	139327.2163	139347.1341	139367.0520	139386.9703
778	139406.8888	139426.8075	139446.7265	139466.6458	139486.5653	139506.4851	139526.4051	139546.3254	139566.2460	139586.1668
779	139606.0878	139626.0092	139645.9307	139665.8526	139685.7747	139705.6970	139725.6196	139745.5425	139765.4656	139785.3890
780	139805.3126	139825.2365	139845.1606	139865.0850	139885.0097	139904.9346	139924.8598	139944.7852	139964.7109	139984.6368
781	140004.5630	140024.4894	140044.4161	140064.3431	140084.2703	140104.1978	140124.1255	140144.0535	140163.9817	140183.9102
782	140203.8390	140223.7680	140243.6973	140263.6268	140283.5566	140303.4866	140323.4169	140343.3474	140363.2782	140383.2093
783	140403.1406	140423.0721	140443.0040	140462.9360	140482.8684	140502.8009	140522.7338	140542.6669	140562.6002	140582.5338
784	140602.4677	140622.4018	140642.3362	140662.2708	140682.2057	140702.1408	140722.0762	140742.0119	140761.9478	140781.8839
785	140801.8203	140821.7570	140841.6939	140861.6311	140881.5685	140901.5062	140921.4441	140941.3823	140961.3208	140981.2595
786	141001.1984	141021.1376	141041.0771	141061.0168	141080.9568	141100.8970	141120.8375	141140.7783	141160.7192	141180.6605
787	141200.6020	141220.5437	141240.4858	141260.4280	141280.3705	141300.3133	141320.2563	141340.1996	141360.1431	141380.0869
788	141400.0310	141419.9753	141439.9198	141459.8646	141479.8097	141499.7550	141519.7005	141539.6463	141559.5924	141579.5387
789	141599.4853	141619.4321	141639.3792	141659.3266	141679.2741	141699.2220	141719.1701	141739.1184	141759.0670	141779.0159
790	141798.9650	141818.9144	141838.8640	141858.8139	141878.7640	141898.7144	141918.6650	141938.6159	141958.5670	141978.5184
791	141998.4700	142018.4219	142038.3741	142058.3265	142078.2791	142098.2320	142118.1852	142138.1386	142158.0922	142178.0462
792	142198.0003	142217.9547	142237.9094	142257.8643	142277.8195	142297.7749	142317.7306	142337.6866	142357.6427	142377.5992
793	142397.5559	142417.5128	142437.4700	142457.4275	142477.3852	142497.3431	142517.3013	142537.2598	142557.2185	142577.1774
794	142597.1366	142617.0961	142637.0558	142657.0158	142676.9760	142696.9365	142716.8972	142736.8582	142756.8194	142776.7809
795	142796.7426	142816.7046	142836.6668	142856.6293	142876.5920	142896.5550	142916.5183	142936.4817	142956.4455	142976.4095
796	142996.3737	143016.3382	143036.3030	143056.2680	143076.2332	143096.1987	143116.1645	143136.1305	143156.0967	143176.0632
797	143196.0300	143215.9970	143235.9642	143255.9317	143275.8995	143295.8675	143315.8358	143335.8043	143355.7730	143375.7420
798	143395.7111	143415.6803	143435.6496	143455.6206	143475.5909	143495.5614	143515.5321	143535.5031	143555.4744	143575.4459
799	143595.4177	143615.3897	143635.3620	143655.3345	143675.3073	143695.2803	143715.2536	143735.2271	143755.2008	143775.1749

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
800	143795.1491	143815.1236	143835.0984	143855.0734	143875.0487	143895.0242	143915.0000	143934.9760	143954.9523	143974.9288
801	143994.9056	144014.8826	144034.8598	144054.8374	144074.8151	144094.7931	144114.7714	144134.7499	144154.7287	144174.7077
802	144194.6870	144214.6665	144234.6462	144254.6262	144274.6065	144294.5870	144314.5678	144334.5488	144354.5300	144374.5115
803	144394.4933	144414.4753	144434.4576	144454.4401	144474.4228	144494.4058	144514.3891	144534.3726	144554.3563	144574.3403
804	144594.3245	144614.3090	144634.2938	144654.2788	144674.2640	144694.2495	144714.2352	144734.2212	144754.2075	144774.1939
805	144794.1807	144814.1676	144834.1549	144854.1423	144874.1301	144894.1180	144914.1063	144934.0947	144954.0834	144974.0724
806	144994.0616	145014.0511	145034.0408	145054.0308	145074.0210	145094.0114	145114.0021	145133.9931	145153.9842	145173.9757
807	145193.9674	145213.9593	145233.9515	145253.9440	145273.9367	145293.9296	145313.9228	145333.9162	145353.9099	145373.9038
808	145393.8980	145413.8924	145433.8871	145453.8820	145473.8771	145493.8725	145513.8682	145533.8641	145553.8602	145573.8566
809	145593.8533	145613.8502	145633.8473	145653.8447	145673.8423	145693.8402	145713.8383	145733.8367	145753.8353	145773.8342
810	145793.8333	145813.8327	145833.8323	145853.8321	145873.8322	145893.8326	145913.8332	145933.8340	145953.8351	145973.8365
811	145993.8380	146013.8399	146033.8420	146053.8443	146073.8468	146093.8497	146113.8527	146133.8560	146153.8596	146173.8634
812	146193.8674	146213.8717	146233.8763	146253.8811	146273.8861	146293.8914	146313.8969	146333.9027	146353.9087	146373.9149
813	146393.9215	146413.9282	146433.9352	146453.9425	146473.9500	146493.9577	146513.9657	146533.9739	146553.9824	146573.9911
814	146594.0001	146614.0093	146634.0187	146654.0285	146674.0384	146694.0486	146714.0590	146734.0697	146754.0807	146774.0918
815	146794.1033	146814.1149	146834.1269	146854.1390	146874.1514	146894.1641	146914.1770	146934.1901	146954.2035	146974.2171
816	146994.2310	147014.2451	147034.2595	147054.2741	147074.2889	147094.3040	147114.3194	147134.3350	147154.3508	147174.3669
817	147194.3832	147214.3998	147234.4166	147254.4337	147274.4510	147294.4685	147314.4863	147334.5044	147354.5226	147374.5412
818	147394.5599	147414.5790	147434.5982	147454.6177	147474.6375	147494.6575	147514.6777	147534.6982	147554.7189	147574.7399
819	147594.7611	147614.7826	147634.8043	147654.8262	147674.8484	147694.8709	147714.8935	147734.9165	147754.9396	147774.9630
820	147794.9867	147815.0106	147835.0348	147855.0591	147875.0838	147895.1086	147915.1338	147935.1591	147955.1847	147975.2106
821	147995.2367	148015.2630	148035.2896	148055.3164	148075.3435	148095.3708	148115.3984	148135.4262	148155.4542	148175.4825
822	148195.5110	148215.5398	148235.5688	148255.5981	148275.6276	148295.6573	148315.6873	148335.7175	148355.7480	148375.7787
823	148395.8097	148415.8409	148435.8723	148455.9040	148475.9360	148495.9681	148516.0006	148536.0332	148556.0661	148576.0993
824	148596.1327	148616.1663	148636.2002	148656.2343	148676.2687	148696.3033	148716.3381	148736.3732	148756.4085	148776.4441
825	148796.4799	148816.5160	148836.5523	148856.5888	148876.6256	148896.6626	148916.6999	148936.7374	148956.7752	148976.8132
826	148996.8514	149016.8899	149036.9286	149056.9676	149077.0068	149097.0462	149117.0859	149137.1258	149157.1660	149177.2064
827	149197.2471	149217.2880	149237.3291	149257.3705	149277.4121	149297.4540	149317.4961	149337.5385	149357.5811	149377.6239
828	149397.6670	149417.7103	149437.7539	149457.7977	149477.8417	149497.8860	149517.9305	149537.9753	149558.0203	149578.0655
829	149598.1110	149618.1567	149638.2027	149658.2489	149678.2954	149698.3421	149718.3890	149738.4362	149758.4836	149778.5313
830	149798.5792	149818.6273	149838.6757	149858.7243	149878.7732	149898.8223	149918.8716	149938.9212	149958.9711	149979.0211
831	149999.0714	150019.1220	150039.1728	150059.2238	150079.2751	150099.3266	150119.3783	150139.4303	150159.4825	150179.5350
832	150199.5878	150219.6407	150239.6939	150259.7473	150279.8010	150299.8549	150319.9091	150339.9635	150360.0181	150380.0730
833	150400.1281	150420.1835	150440.2391	150460.2949	150480.3510	150500.4073	150520.4639	150540.5207	150560.5777	150580.6350
834	150600.6925	150620.7503	150640.8083	150660.8665	150680.9250	150700.9837	150721.0426	150741.1018	150761.1613	150781.2209
835	150801.2809	150821.3410	150841.4014	150861.4620	150881.5229	150901.5840	150921.6454	150941.7070	150961.7688	150981.8309
836	151001.8932	151021.9557	151042.0185	151062.0815	151082.1448	151102.2083	151122.2720	151142.3360	151162.4002	151182.4647
837	151202.5294	151222.5943	151242.6595	151262.7249	151282.7906	151302.8565	151322.9226	151342.9890	151363.0556	151383.1224
838	151403.1895	151423.2568	151443.3244	151463.3922	151483.4603	151503.5285	151523.5971	151543.6658	151563.7348	151583.8040
839	151603.8735	151623.9432	151644.0132	151664.0834	151684.1538	151704.2245	151724.2954	151744.3665	151764.4379	151784.5095
840	151804.5813	151824.6534	151844.7258	151864.7983	151884.8711	151904.9442	151925.0175	151945.0910	151965.1648	151985.2388
841	152005.3130	152025.3875	152045.4622	152065.5371	152085.6123	152105.6877	152125.7634	152145.8393	152165.9154	152185.9918
842	152206.0684	152226.1453	152246.2223	152266.2997	152286.3772	152306.4550	152326.5331	152346.6113	152366.6898	152386.7686
843	152406.8476	152426.9268	152447.0063	152467.0860	152487.1659	152507.2461	152527.3265	152547.4071	152567.4880	152587.5691
844	152607.6505	152627.7321	152647.8139	152667.8960	152687.9783	152708.0608	152728.1436	152748.2266	152768.3099	152788.3933
845	152808.4771	152828.5610	152848.6452	152868.7297	152888.8143	152908.8992	152928.9844	152949.0698	152969.1554	152989.2412
846	153009.3273	153029.4137	153049.5002	153069.5870	153089.6741	153109.7613	153129.8488	153149.9366	153170.0245	153190.1128
847	153210.2012	153230.2899	153250.3789	153270.4680	153290.5574	153310.6471	153330.7369	153350.8270	153370.9174	153391.0079
848	153411.0988	153431.1898	153451.2811	153471.3726	153491.4644	153511.5564	153531.6486	153551.7411	153571.8338	153591.9267
849	153612.0199	153632.1133	153652.2069	153672.3008	153692.3949	153712.4892	153732.5838	153752.6787	153772.7737	153792.8690

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
950	174021.8945	174042.2127	174062.5311	174082.8497	174103.1685	174123.4876	174143.8068	174164.1263	174184.4460	174204.7658
951	174225.0859	174245.4062	174265.7268	174286.0475	174306.3684	174326.6896	174347.0109	174367.3325	174387.6543	174407.9762
952	174428.2984	174448.6208	174468.9435	174489.2663	174509.5893	174529.9126	174550.2360	174570.5597	174590.8836	174611.2076
953	174631.5319	174651.8564	174672.1812	174692.5061	174712.8312	174733.1566	174753.4821	174773.8079	174794.1338	174814.4600
954	174834.7864	174855.1130	174875.4398	174895.7669	174916.0941	174936.4215	174956.7492	174977.0770	174997.4051	175017.7334
955	175038.0619	175058.3906	175078.7195	175099.0486	175119.3779	175139.7075	175160.0372	175180.3672	175200.6973	175221.0277
956	175241.3583	175261.6891	175282.0201	175302.3513	175322.6827	175343.0143	175363.3462	175383.6782	175404.0105	175424.3429
957	175444.6756	175465.0085	175485.3416	175505.6749	175526.0084	175546.3421	175566.6760	175587.0102	175607.3445	175627.6790
958	175648.0138	175668.3488	175688.6840	175709.0193	175729.3549	175749.6907	175770.0268	175790.3630	175810.6994	175831.0361
959	175851.3729	175871.7100	175892.0472	175912.3847	175932.7224	175953.0603	175973.3984	175993.7367	176014.0752	176034.4139
960	176054.7528	176075.0920	176095.4313	176115.7709	176136.1107	176156.4506	176176.7908	176197.1312	176217.4718	176237.8126
961	176258.1536	176278.4949	176298.8363	176319.1779	176339.5198	176359.8618	176380.2041	176400.5466	176420.8892	176441.2321
962	176461.5752	176481.9185	176502.2620	176522.6058	176542.9497	176563.2938	176583.6382	176603.9827	176624.3275	176644.6724
963	176665.0176	176685.3630	176705.7086	176726.0544	176746.4004	176766.7466	176787.0930	176807.4396	176827.7865	176848.1335
964	176868.4808	176888.8282	176909.1759	176929.5237	176949.8718	176970.2201	176990.5686	177010.9173	177031.2662	177051.6153
965	177071.9647	177092.3142	177112.6639	177133.0139	177153.3640	177173.7144	177194.0649	177214.4157	177234.7667	177255.1179
966	177275.4693	177295.8209	177316.1727	177336.5247	177356.8769	177377.2294	177397.5820	177417.9348	177438.2879	177458.6411
967	177478.9946	177499.3483	177519.7021	177540.0562	177560.4105	177580.7650	177601.1197	177621.4746	177641.8298	177662.1851
968	177682.5406	177702.8963	177723.2523	177743.6084	177763.9648	177784.3214	177804.6781	177825.0351	177845.3923	177865.7497
969	177886.1073	177906.4651	177926.8231	177947.1813	177967.5397	177987.8984	178008.2572	178028.6162	178048.9755	178069.3349
970	178089.6946	178110.0545	178130.4145	178150.7748	178171.1353	178191.4960	178211.8569	178232.2180	178252.5793	178272.9408
971	178293.3025	178313.6644	178334.0266	178354.3889	178374.7515	178395.1142	178415.4772	178435.8403	178456.2037	178476.5673
972	178496.9310	178517.2950	178537.6592	178558.0236	178578.3882	178598.7530	178619.1180	178639.4833	178659.8487	178680.2143
973	178700.5801	178720.9462	178741.3124	178761.6789	178782.0455	178802.4124	178822.7795	178843.1468	178863.5142	178883.8819
974	178904.2498	178924.6179	178944.9862	178965.3547	178985.7234	179006.0923	179026.4615	179046.8308	179067.2003	179087.5701
975	179107.9400	179128.3101	179148.6805	179169.0511	179189.4218	179209.7928	179230.1640	179250.5353	179270.9069	179291.2787
976	179311.6507	179332.0229	179352.3953	179372.7679	179393.1407	179413.5137	179433.8870	179454.2604	179474.6340	179495.0079
977	179515.3819	179535.7561	179556.1306	179576.5052	179596.8801	179617.2552	179637.6304	179658.0059	179678.3816	179698.7575
978	179719.1336	179739.5099	179759.8864	179780.2631	179800.6400	179821.0171	179841.3944	179861.7719	179882.1496	179902.5276
979	179922.9057	179943.2840	179963.6626	179984.0413	180004.4202	180024.7994	180045.1788	180065.5583	180085.9381	180106.3181
980	180126.6982	180147.0786	180167.4592	180187.8400	180208.2210	180228.6022	180248.9836	180269.3652	180289.7470	180310.1290
981	180330.5112	180350.8936	180371.2762	180391.6590	180412.0421	180432.4253	180452.8087	180473.1924	180493.5762	180513.9603
982	180534.3445	180554.7290	180575.1136	180595.4985	180615.8836	180636.2688	180656.6543	180677.0400	180697.4259	180717.8119
983	180738.1982	180758.5847	180778.9714	180799.3583	180819.7454	180840.1327	180860.5202	180880.9079	180901.2958	180921.6840
984	180942.0723	180962.4608	180982.8495	181003.2385	181023.6276	181044.0169	181064.4065	181084.7962	181105.1862	181125.5763
985	181145.9667	181166.3573	181186.7480	181207.1389	181227.5301	181247.9215	181268.3130	181288.7048	181309.0968	181329.4890
986	181349.8813	181370.2739	181390.6667	181411.0597	181431.4529	181451.8463	181472.2399	181492.6337	181513.0277	181533.4219
987	181553.8163	181574.2109	181594.6057	181615.0008	181635.3960	181655.7914	181676.1870	181696.5828	181716.9789	181737.3751
988	181757.7715	181778.1682	181798.5650	181818.9621	181839.3593	181859.7568	181880.1544	181900.5523	181920.9503	181941.3486
989	181961.7470	181982.1457	182002.5445	182022.9436	182043.3429	182063.7423	182084.1420	182104.5419	182124.9420	182145.3422
990	182165.7427	182186.1434	182206.5443	182226.9454	182247.3467	182267.7481	182288.1498	182308.5517	182328.9538	182349.3561
991	182369.7586	182390.1613	182410.5642	182430.9673	182451.3706	182471.7741	182492.1778	182512.5818	182532.9859	182553.3902
992	182573.7947	182594.1994	182614.6043	182635.0094	182655.4148	182675.8203	182696.2260	182716.6319	182737.0381	182757.4444
993	182777.8509	182798.2577	182818.6646	182839.0717	182859.4791	182879.8866	182900.2943	182920.7023	182941.1104	182961.5188
994	182981.9273	183002.3361	183022.7450	183043.1542	183063.5635	183083.9731	183104.3828	183124.7928	183145.2029	183165.6133
995	183186.0238	183206.4346	183226.8455	183247.2567	183267.6681	183288.0796	183308.4914	183328.9033	183349.3155	183369.7279
996	183390.1404	183410.5532	183430.9662	183451.3793	183471.7927	183492.2063	183512.6200	183533.0340	183553.4482	183573.8625
997	183594.2771	183614.6919	183635.1069	183655.5220	183675.9374	183696.3530	183716.7687	183737.1847	183757.6009	183778.0173
998	183798.4339	183818.8506	183839.2676	183859.6848	183880.1022	183900.5197	183920.9375	183941.3555	183961.7737	183982.1921
999	184002.6106	184023.0294	184043.4484	184063.8676	184084.2870	184104.7065	184125.1263	184145.5463	184165.9665	184186.3869

Tabelle 2

Tabelle der $2n \cdot \ln(n)$ für
$n = 1/2$ bis $n = 499\ 1/2$
zur Anwendung der YATES-
Korrektur

x	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5
0	0.0000	1.2164	4.5815	8.7693	13.5367	18.7522	24.3334	30.2235	36.3811	42.7745
1	49.3789	56.1740	63.1432	70.2726	77.5503	84.9660	92.5109	100.1770	107.9575	115.8462
2	123.8374	131.9263	140.1082	148.3790	156.7350	165.1726	173.6887	182.2802	190.9445	199.6790
3	208.4813	217.3492	226.2806	235.2735	244.3262	253.4368	262.6038	271.8256	281.1007	290.4278
4	299.8055	309.2326	318.7078	328.2302	337.7985	347.4118	357.0691	366.7693	376.5117	386.2953
5	396.1193	405.9829	415.8854	425.8259	435.8039	445.8185	455.8692	465.9553	476.0761	486.2312
6	496.4198	506.6416	516.8958	527.1821	537.4998	547.8486	558.2279	568.6372	579.0762	589.5444
7	600.0414	610.5667	621.1201	631.7010	642.3091	652.9440	663.6055	674.2931	685.0065	695.7454
8	706.5094	717.2983	728.1117	738.9494	749.8110	760.6963	771.6050	782.5368	793.4915	804.4687
9	815.4683	826.4900	837.5336	848.5988	859.6854	870.7931	881.9218	893.0712	904.2411	915.4314
10	926.6417	937.8719	949.1219	960.3913	971.6801	982.9880	994.3149	1005.6605	1017.0248	1028.4075
11	1039.8084	1051.2275	1062.6645	1074.1192	1085.5916	1097.0815	1108.5887	1120.1130	1131.6544	1143.2125
12	1154.7876	1166.3792	1177.9872	1189.6116	1201.2521	1212.9087	1224.5813	1236.2697	1247.9737	1259.6933
13	1271.4284	1283.1788	1294.9444	1306.7251	1318.5208	1330.3313	1342.1566	1353.9966	1365.8511	1377.7200
14	1389.6033	1401.5008	1413.4125	1425.3382	1437.2778	1449.2312	1461.1985	1473.1793	1485.1737	1497.1816
15	1509.2029	1521.2374	1533.2852	1545.3461	1557.4200	1569.5068	1581.6065	1593.7190	1605.8442	1617.9820
16	1630.1324	1642.2952	1654.4704	1666.6578	1678.8576	1691.0695	1703.2934	1715.5294	1727.7773	1740.0371
17	1752.3087	1764.5921	1776.8870	1789.1936	1801.5117	1813.8413	1826.1823	1838.5346	1850.8981	1863.2729
18	1875.6588	1888.0558	1900.4638	1912.8828	1925.3127	1937.7534	1950.2049	1962.6671	1975.1399	1987.6234
19	2000.1175	2012.6220	2025.1370	2037.6624	2050.1981	2062.7441	2075.3003	2087.8667	2100.4433	2113.0299
20	2125.6265	2138.2331	2150.8497	2163.4761	2176.1123	2188.7583	2201.4141	2214.0795	2226.7546	2239.4392
21	2252.1335	2264.8372	2277.5503	2290.2729	2303.0049	2315.7462	2328.4967	2341.2565	2354.0255	2366.8036
22	2379.5909	2392.3872	2405.1926	2418.0069	2430.8302	2443.6624	2456.5035	2469.3534	2482.2120	2495.0795
23	2507.9556	2520.8405	2533.7340	2546.6360	2559.5467	2572.4658	2585.3935	2598.3296	2611.2742	2624.2271
24	2637.1884	2650.1580	2663.1358	2676.1220	2689.1163	2702.1188	2715.1295	2728.1482	2741.1751	2754.2100
25	2767.2529	2780.3038	2793.3627	2806.4295	2819.5041	2832.5867	2845.6770	2858.7752	2871.8811	2884.9947
26	2898.1161	2911.2451	2924.3818	2937.5261	2950.6780	2963.8375	2977.0045	2990.1790	3003.3609	3016.5504
27	3029.7472	3042.9514	3056.1630	3069.3820	3082.6082	3095.8418	3109.0826	3122.3306	3135.5859	3148.8483
28	3162.1179	3175.3946	3188.6784	3201.9693	3215.2672	3228.5722	3241.8842	3255.2031	3268.5291	3281.8619
29	3295.2017	3308.5483	3321.9018	3335.2622	3348.6293	3362.0033	3375.3840	3388.7715	3402.1656	3415.5665
30	3428.9741	3442.3883	3455.8092	3469.2366	3482.6707	3496.1113	3509.5585	3523.0122	3536.4724	3549.9391
31	3563.4122	3576.8918	3590.3778	3603.8702	3617.3690	3630.8741	3644.3856	3657.9034	3671.4275	3684.9579
32	3698.4945	3712.0374	3725.5865	3739.1418	3752.7033	3766.2710	3779.8448	3793.4247	3807.0107	3820.6028
33	3834.2010	3847.8052	3861.4155	3875.0318	3888.6541	3902.2823	3915.9166	3929.5567	3943.2028	3956.8548
34	3970.5127	3984.1765	3997.8461	4011.5215	4025.2028	4038.8899	4052.5828	4066.2814	4079.9858	4093.6960
35	4107.4119	4121.1334	4134.8607	4148.5936	4162.3322	4176.0765	4189.8263	4203.5818	4217.3428	4231.1095
36	4244.8817	4258.6595	4272.4427	4286.2315	4300.0259	4313.8257	4327.6309	4341.4416	4355.2578	4369.0794
37	4382.9064	4396.7388	4410.5766	4424.4197	4438.2683	4452.1221	4465.9813	4479.8458	4493.7156	4507.5906
38	4521.4710	4535.3566	4549.2474	4563.1435	4577.0448	4590.9513	4604.8629	4618.7798	4632.7018	4646.6290
39	4660.5612	4674.4987	4688.4412	4702.3888	4716.3415	4730.2993	4744.2621	4758.2300	4772.2029	4786.1808
40	4800.1637	4814.1516	4828.1446	4842.1424	4856.1453	4870.1530	4884.1657	4898.1834	4912.2059	4926.2333
41	4940.2656	4954.3028	4968.3449	4982.3918	4996.4435	5010.5001	5024.5614	5038.6276	5052.6986	5066.7743
42	5080.8548	5094.9401	5109.0301	5123.1248	5137.2243	5151.3285	5165.4373	5179.5509	5193.6692	5207.7921
43	5221.9196	5236.0519	5250.1887	5264.3302	5278.4763	5292.6270	5306.7823	5320.9421	5335.1066	5349.2756
44	5363.4491	5377.6272	5391.8098	5405.9970	5420.1886	5434.3847	5448.5854	5462.7905	5477.0001	5491.2141
45	5505.4326	5519.6556	5533.8829	5548.1147	5562.3509	5576.5915	5590.8365	5605.0858	5619.3396	5633.5977
46	5647.8601	5662.1269	5676.3981	5690.6735	5704.9533	5719.2374	5733.5257	5747.8184	5762.1153	5776.4165
47	5790.7220	5805.0317	5819.3457	5833.6639	5847.9863	5862.3129	5876.6437	5890.9788	5905.3180	5919.6614
48	5934.0090	5948.3607	5962.7166	5977.0766	5991.4408	6005.8091	6020.1815	6034.5580	6048.9387	6063.3234
49	6077.7122	6092.1051	6106.5020	6120.9031	6135.3081	6149.7172	6164.1304	6178.5476	6192.9688	6207.3940